

برهان دانش

و تفکر ریاضی

برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲

۱

شماره:

دوره سوم ← پاییز ۱۴۰۳ ← ۴۸ صفحه ← بها: ۵۰,۰۰۰ تومان

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی



- آشنایی با هندسه ➤ مفهوم فناوری نانو (نانوتکنولوژی) و کاربرد آن ➤ ترکیب توابع
- مجموعه‌ها و گراف‌ها ➤ تحلیل سؤالات هندسه ۱، ۲ و ۳ (کنکور سراسری ۱۴۰۳)

امام علی (ع):

در شرافت علم، همین بس که
کسی که آن را نمی‌داند،
مدعی آن می‌شود و اگر آن را
به او نسبت دهند، شاد می‌گردد.

المحجة البيضاء / ص ۴۰

رسول اکرم (ص):

حکمت و دانش،
گمشده افراد با ایمان است.

آداب تعلیم و تربیت / ص ۱۹۵

«آموزش و علم»

در

«آیات و احادیث»

امام علی (ع):

در نگوشت چهل،
همین کافی است که جاهل خود را
از آن تبرئه می‌کند.

المحجة البيضاء / ص ۴۰

امام صادق (ع):

بنویسید؛ زیرا شما نمی‌توانید
جز با نگارش، دانش را حفظ
و از آن نگهداری کنید.

غرر الحکم / ص ۲۸۲



با نهایت تأسّف و تأثر درگذشت دانشمند فرهیخته و
استاد گرانقدر و بسیجی، شادروان دکتر ابراهیم ریحانی
را به جامعه ریاضی کشور و خانواده معزز ایشان،
تسلّیت عرض نموده و برای ایشان مغفرت الهی و برای
بازماندگان صبر و شکیبایی از درگاه خداوند متعال
خواستاریم.

هیأت تحریریه و شورای سردبیری
مجله برهان دانش و تفکر ریاضی



برهان دانش و تفکر ریاضی



شماره:

تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

دوره سوم ← پاییز ۱۴۰۳ ← ۴۸ صفحه ← بها: ۵۰.۰۰۰ تومان ←

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: حمیدرضا امیری □ شورای سردبیری: حمیدرضا امیری (دبیر شورا) / میرشهرام صدر / اکرم قابل رحمت

مدیر داخلی: میرشهرام صدر □ هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری / لطافت امیری / اسحاق اسفندیار / میرشهرام صدر / اکرم قابل رحمت / محمدعلی فریبرز عراقی / حسین کریمی / محمدحسن گورانی

مدیر هنری و طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی □ رسام: فرزانه پورسیفی

مدیر حروف‌نگاری: نغمه ارفعی‌زاده □ حروف‌نگاری: مهشید ابوالحسنی □ همکار اجرایی متن: فرناز براتی‌پورفرد

نشانی: خیابان انقلاب، نرسیده به چهارراه فلسطین، پلاک ۹۲۳، طبقه سوم □ تلفن: ۰۹۱۲۱۰۸۷۲۶۴ □ چاپخانه: چکاد

رایانامه: borhan.dtmath2@gmail.com □ ارتباط با ما: https://ble.ir/borhan_sadr

سختن دبیر شورا	حرف اول: بهترین علم و میوه آن چیست؟	دبیر شورا
آموزشی	آشنایی با هندسه	محمدحسن گورانی
	مفهوم فناوری نانو (نانوتکنولوژی) و کاربرد آن	محمدعلی فریبرز عراقی
	رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول	میرشهرام صدر
	با روش نقطه‌یابی و انتقال	
	آموزش ترجمه متون ریاضی فارسی به انگلیسی (۶)	حمیدرضا امیری
	مجموعه‌ها و گراف‌ها	لطافت امیری
تاریخ و فلسفه ریاضی	داستان اعداد (۴)	محمدحسن گورانی
	فلسفه ریاضی چیست؟ - استدلال استقرایی (۶)	حمیدرضا امیری
گفت و گو	در باغ تجربه‌ها - پای صحبت استاد احمد پیرشک	زنده‌یاد غلامرضا یاسی‌پور
واژگان ریاضی	ترکیب توابع (۲)	اکرم قابل رحمت
ریاضیات کاربردی	کاربرد از مشتق در هندسه	جلال سرحدی
آموزشی	تحلیل سوالات هندسه ۱، ۲ و ۳ (کنکور سراسری ۱۴۰۳)	محمدحسن گورانی
	تهدیلات و انتقال توابع	اکرم قابل رحمت

مجله ریاضی برهان دانش و تفکر ریاضی، از همه دبیران ریاضی، دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضی در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کاربردی ریاضی (کاربرد در زندگی روزمره و علوم دیگر)
- نگارش مقاله‌های کمک آموزشی (منطبق با سرفصل‌های کتاب درسی ریاضی دوره متوسطه دوم)
- طرح معماها و جدول‌های ریاضی
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان
- نگارش مقاله‌های خواندنی ریاضی، مانند تاریخ ریاضیات، لطیفه‌های علمی و آموزشی و ...
- تهیه گزارش از مدارس موفق و مصاحبه با دبیران و دانش‌آموزان موفق.

لطفاً در مقاله‌های ارسال شده نکات زیر را در نظر بگیرید:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار دادن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر پیوست و در حاشیه مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی شورای نویسندگان قرار گیرد و پس از تصویب مقاله، سفارش ترجمه به فرستنده مقاله داده خواهد شد.
- در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحه مورد استفاده باشد.
- چکیده‌ای از اثر و مقاله ارسال شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطالب ارسال شود.
- در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده ذکر شود.

هم‌چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

حرف اول

بهترین علم و میوه آن چیست؟

امیرالمؤمنین علی (ع) می‌فرمایند:

«بر شما بار به طلب علم، زیرا طلب علم واجب است، علم مایه پیوند میان برادران و راهنما به مروت و جوانمردی است، تفقه مجالس و همنشین در مسافرت و مایه انس و رهایی از تنهایی، در غربت است»^۱.

آری عزیزان دانش‌آموز، طلب علم و «دانش‌آموزی» وظیفه‌ای است واجب و چه خوب است که شما به این واجب و انهام آن توجه خاص مبذول داشته تا از عواقب خوب آن نیز بهره‌مند شوید. آیا هر علمی و طلب آن علم را می‌توان وظیفه واجب شمرد و چه علمی، ره‌گشا و نجات‌دهنده است؟ جواب این سؤال را نیز از زبان امام علی (ع) بشنویم که می‌فرمایند:

«بهترین علم، آن علمی است که به وسیله آن راه رشد و هدایت را اصلاح کنی، و بدترین علم، علمی است که توسط آن آفت‌ها خود را تباه گردانی»^۲.

حال این سؤال پیش می‌آید که فایده این علم، همان که مولا علی (ع) آن را بهترین علم نامید چیست؟ ایشان می‌فرمایند:

«نتیجه و فایده علم و دانش، نیکوکاری است»^۳.

یعنی میوه درخت علم، عمل نیک است و این میوه به ثمر نمی‌رسد جز با زحمت و صبر و استقامت در راه کسب علم و رسیدن به بالاترین درجات آن که در این زمینه نیز امیرالمؤمنین علی (ع) می‌فرمایند:

«ای جوانمرد علم‌دوست عالم و دانشمند حقیقی دارای سه علامت است: دانایی، بردباری و سکوت به‌جا و به‌مورد»^۴.
آیا شما نیز دارای این ویژگی‌ها می‌باشید؟ آیا هدف از علم‌آموزی را همان‌گونه که امامان ما علیهم‌السلام تشریح نموده‌اند، در پیش‌رو دارید؟ آیا با اخرونی علم در خودتان اساس قدرت می‌کنید یا ضعف یا هر دو، هر کدام در حقیقت؟ حرف اول را با سقنی از پیامبر اسلام (ص) به نقل از ولی و وصی بر حقشان علی (ع) به پایان می‌بریم:

«کسی که علم را برای خدا طلب کند، به هیچ بخشی از آن نرسد مگر شکسته نفسی‌اش بیشتر، و خروتنی‌اش در میان مردم زیادتر و خدا ترسی‌اش اخرونتر و جهد و کوشش او در دین بیشتر شود، و این است آن کسی که از علم و دانایی برخوردار است، پس (تا می‌تواند) بیشتر پیاموردم»^۵.

والسلام - حمیدرضا امیری

۱. بهار الانوار / ج ۱، صفحه ۱۸۳

۲. غررالحکم / فصل ۲۹، حدیث ۷۵

۳. البیاه / ج ۲، ص ۳۱۰

۴. غررالحکم حرف (غ)

۵. کنز العمال / ج ۱۰، حدیث ۲۹۳۸۴

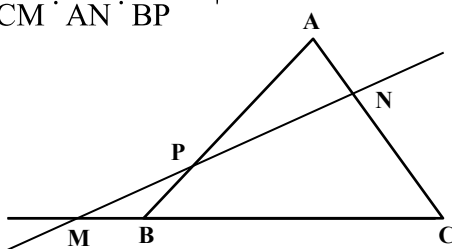
آشنایی با هندسه

اشاره: دوستان و یاران گلم گرامی سلام!

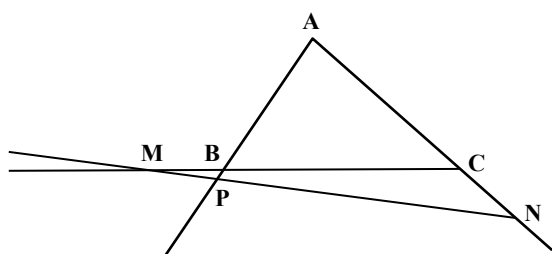
باز هم آرزوی سلامتی برایتان دارم و پائیز بهاری را از خداوند برایتان خواستارم. از سری قبل اثبات و بررسی برخی از قضیه‌های مهم هندسه را با هم شروع کردیم که این بار هم می‌خواهیم این موضوع را ادامه دهیم و «قضیه مثلثاتوس» را با هم اثبات کنیم. «در اساطیر یونان، شاه اسپارت، پسر آترئوس، بردار آگاممنون، شوهر هلن و پدر هرمیونه، با کمک بردار خود، تونستس را از تخت سلطنت برکنار کردند. مثلثاتوس، پس از جنگ نزوا با هلن به اسپارت بازگشت و تا زمانی که زئوس او را به الوسیوم منتقل کرد در آرامش زیست. محل دفن او هم احتمالاً در بخش جنوبی یونان است.»

← **قضیه مثلثاتوس:** نقاط M، N و P واقع بر یک خط، به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB قرار دارند. آن‌گاه:

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} = 1$$



شکل (الف)



شکل (ب)



با توجه به این تساوی و فرض مسأله می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BM'}{CM'}$$

با تفاضل در مخرج خواهیم داشت:

$$\frac{BM}{CM - BM} = \frac{BM'}{CM' - BM'} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BM'}{BC}$$

یعنی این که $BM = BM'$ بر M همان M' است در نتیجه M و N و P بر یک استقامتند.

تذکر مهم: اگر برای سه نقطه با شرایط قضیه داشته باشیم

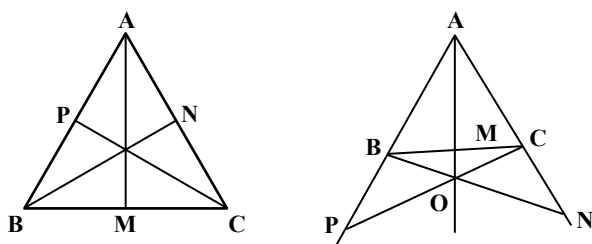
$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} = \frac{CN}{AN} = 1$$

و CP همرس هستند.

مثال ۱

قضیه سوا را به کمک قضیه منلائوس اثبات کنید.

برهان:



$$\left. \begin{aligned} \triangle ABM \Rightarrow \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MO}{AO} &= 1 \\ \triangle BON \Rightarrow \frac{BM}{BC} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AO}{MO} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{در هم ضرب}$$

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$$

مثال ۲

در هر مثلث نیمسازهای زوایای خارجی امتدادهای اضلاع مقابل را در سه نقطه واقع بر یک خط راست قطع می کنند.

برهان: با توجه به شکل (الف) می توان نوشت:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{S_{BMP}}{S_{CMP}}, \frac{CN}{AN} = \frac{S_{CNP}}{S_{ANP}}, \frac{AP}{BP} = \frac{S_{ANP}}{S_{BNP}}$$

پس می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} = \frac{S_{BMP}}{S_{CMP}} \cdot \frac{S_{CNP}}{S_{BNP}} = \frac{MP \cdot BP \cdot \sin(\hat{BPM})}{CP \cdot MP \cdot \sin(\hat{CPM})} \times \frac{CP \cdot NP \cdot \sin \hat{CPN}}{BP \cdot NP \cdot \sin \hat{BPN}}$$

با توجه به این که $\hat{BPM} + \hat{BPN} = 180^\circ$

و $\hat{CPM} + \hat{CPN} = 180^\circ$ پس:

$$\frac{S_{BMP}}{S_{CMP}} \cdot \frac{S_{CNP}}{S_{BNP}} = 1$$

و در نتیجه:

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} = 1$$

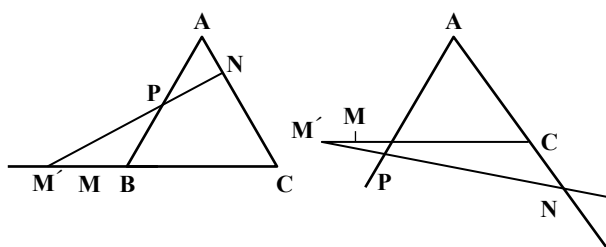
در مورد شکل (ب)، فقط زاویه ها تغییر می کند و در آخر به همان

نتیجه می رسیم.

(عکس قضیه منلائوس)

نقاط M, N, P به ترتیب بر اضلاع یا امتداد اضلاع BC, AC, AB

و قرار دارند، اگر $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$ آنگاه سه نقطه M, N, P بر یک خط قرار دارند.



برهان: فرض کنیم M و N و P بر یک خط واقع نباشند

به P وصل می کنیم تا BC را در M' قطع کند. بنا بر قضیه منلائوس می توان گفت:

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM'}{CM'} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$$

۲ خط راستی که ضلع‌های AB و BC و امتداد ضلع AC از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط D ، E و F قطع می‌کند ثابت کنید وسط پاره‌های DC ، AE و BF بر یک خط راست واقع‌اند (خط گاوسی)

«با علی مدد»

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{AC}, \frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AB}, \frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1 \Rightarrow \text{بریک خطاند F و E و D}$$

تفریح
اندیشه

خانواده‌های M، F، C، B و S در طبقه‌های مختلف ساختمانی زندگی می‌کنند که تنها پنج طبقه دارد. با در دست داشتن اطلاعات زیر می‌توانید بگویید هر یک در کدام طبقه زندگی می‌کند؟

۱. B در طبقه آخر زندگی نمی‌کند. ۲. C در طبقه اول زندگی نمی‌کند.
۳. F در طبقه آخر یا طبقه اول زندگی نمی‌کند. ۴. M در طبقه بالاتر از طبقه C زندگی می‌کند.
۵. S در طبقه‌ای مجاور (بلافاصله بالا یا زیر) طبقه F زندگی نمی‌کند. ۶. F در طبقه‌ای مجاور طبقه C زندگی می‌کند.

[illegible]

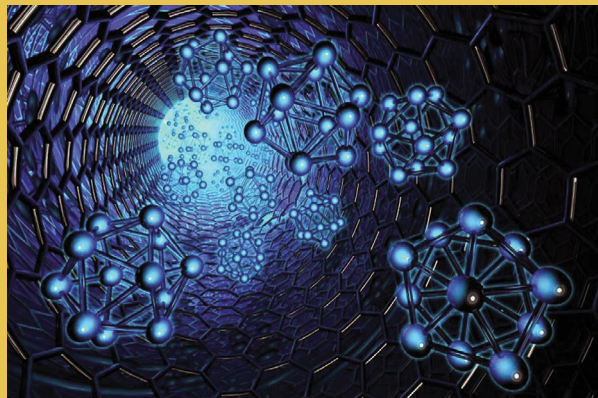
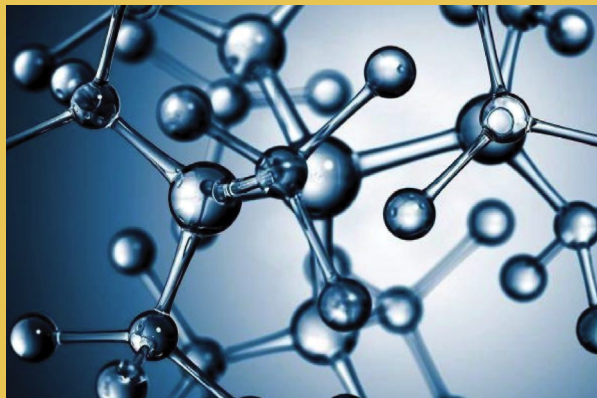
در محله A1 قرار دارد که به اندازه ۴۴۴۴۴ متر مربع مساحت دارد. این محله در نزدیکی مراکز تجاری و خدماتی قرار دارد و دارای امکانات رفاهی و تفریحی است. همچنین دارای فضای سبز و پارکینگ است.

مفهوم فناوری نانو (نانوتکنولوژی) و کاربرد آن

چکیده: فناوری نانو به واسطه ظهور نانولوله‌ها دستخوش تغییرات زیادی شده است. اندازه‌های بسیار کوچک نانولوله‌ها و همچنین خصوصیات مکانیکی، فیزیکی، شیمیایی، پایداری حرارتی و الکتریکی و نوری بی‌نظیر آنها باعث شده است که این مواد کاربردهای گسترده‌ای پیدا کنند. یکی از گسترده‌ترین کاربردهای مورد استفاده نانولوله‌های کربنی در زیست پزشکی، استفاده از آنها در دارورسانی می‌باشد. همچنین رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی تحت حرکت جرم‌هایی در مقیاس نانو یا نانوذرات مورد توجه محققان قرار گرفته است که این امر بیشتر مربوط به استفاده از نانولوله‌ها در کاربردهایی به منظور انتقال مولکول‌ها، داروها و پروتئین‌ها و ... می‌باشد. در این مقاله به معرفی مفهوم نانو و برخی از کاربردهای آن پرداخته می‌شود.

زنده را به‌طور کامل شامل می‌شوند (شکل ۱). از زمانی که انسان‌ها به تولید مواد نانوساختاری و کاربرد آنها در زمینه‌های مختلف ابراز علاقه نمودند بیش از دو دهه نمی‌گذرد و انتشار مقالات در این موضوع نسبتاً جدید است.

قدمت فناوری نانو و کاربرد آن در طبیعت به ابتدای خلقت حیات باز می‌گردد. اولین شیوه حیات، موجودات تک سلولی است. اگر دقیق‌تر وارد شویم مولکول‌های DNA و RNA و ژن‌ها، مولکول‌هایی هستند که اطلاعات بنیادین ساختار حیات آن موجود



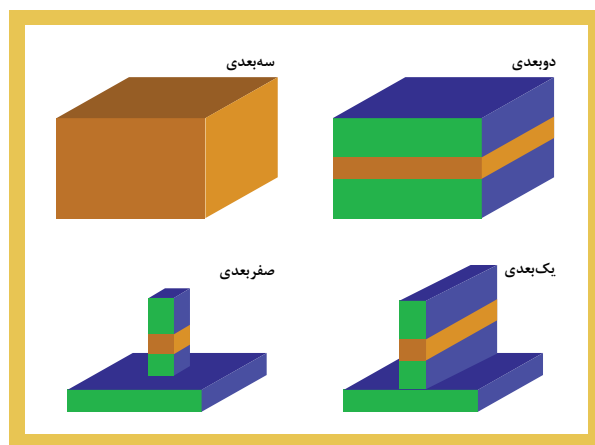
شکل ۱

با موضوع نانوتکنولوژی مولکولی به چاپ رسید. اولین کسی بود که در سال ۱۹۹۱ از دانشگاه MIT مدرک دکتری نانوتکنولوژی را دریافت نمود.

فناوری نانو یا نانوتکنولوژی در ترجمه لفظ به لفظ، به معنی تکنولوژی بسیار کوچک می‌باشد. که فناوری تغییر در خواص مولکولهای تشکیل دهنده مواد است و به همین دلیل مقیاس نانو بهترین تعریف برای این تکنولوژی می‌باشد. بشر سعی دارد با استفاده از فناوری نانو خواص مولکولها را تغییر دهد تا وقتی که جسمی از این مولکولها درست شود و تمام خواص این مولکولها (و ماده اصلی) را در خود داشته باشد.

نانو کلمه‌ای یونانی به معنی کوچک است و برای تعیین مقدار یک میلیاردیم (10^{-9}) یک کمیت استفاده می‌شود. چون یک اتم تقریباً ۱ نانومتر (یک میلیاردیم متر) است، این اصطلاح برای مطالعه عمومی روی ذرات اتمی و مولکولی به کار برده می‌شود.

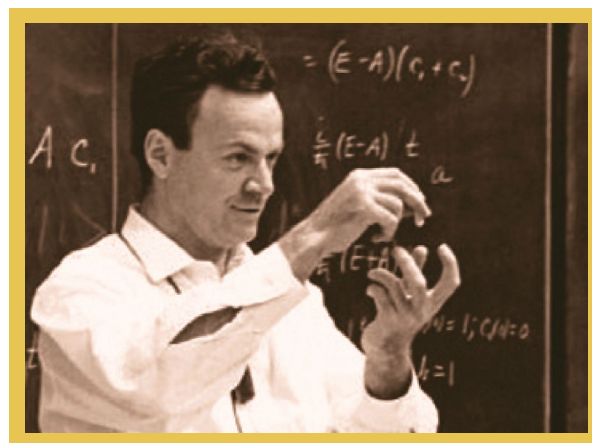
هر ماده از سه بعد تشکیل شده است، اگر حداقل یکی از این ابعاد در مقیاس نانو باشد، یعنی بین ۱ تا ۱۰۰ نانومتر باشد، به آن یک ماده نانوساختار گفته می‌شود. به بعدی که در مقیاس نانو نباشد، بعد آزاد گفته می‌شود، زیرا هر مقداری می‌تواند داشته باشد بنابراین مواد نانوساختار دارای انواع مختلفی می‌باشند: صفر بعدی، یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی. در شکل ۳ انواع نانوساختارها نشان داده شده است.



شکل ۳

نانو مواد صفر بعدی، موادی هستند که در هر سه بعد دارای اندازه نانومتری می‌باشند و هیچ بعد آزادی ندارند. به این دسته نانوذرات گفته می‌شود. عوامل تأثیرگذار بر خواص نانو ذرات،

فناوری نانو برای اولین بار در سال ۱۹۵۹ توسط ریچارد فاینمن (Richard Feynman) دانشمند دارنده جایزه نوبل مطرح شد (شکل ۲). او در یک سخنرانی در انجمن فیزیک آمریکا با عنوان «در سطوح پایین، فضای زیادی وجود دارد»، سؤالاتی در زمینه کار با مواد و اجسام در ابعاد خیلی ریز مطرح کرد که ذهن هر شنونده‌ای را به خود مشغول ساخت. وی این نظریه را ارائه داد که در آینده‌ای نزدیک می‌توانیم مولکولها و اتمها را به صورت مستقیم دستکاری کنیم. او همچنین با ذکر تفاوت علوم نانو و فیزیک بنیادی، پیشنهادهایی مطرح کرد که هر چند برای افراد در آن دهه تعجب برانگیز و غیرممکن تصور می‌شد، اما امروز شاهد اجرایی شدن بسیاری از این پیشنهادها هستیم و با پیشرفت روز افزون بشر در زمینه علوم مختلف و تکنولوژی و همچنین دستیابی انسان به ابعاد بسیار ریز ماده، پیش‌بینی می‌گردد که تمامی پیشنهادهای او روزی به حوزه واقعیت‌های علم بشر وارد شوند.



شکل ۲

واژه فناوری نانو اولین بار توسط دانشمند ژاپنی به نام نوریو تاینگوچی (Norio Taniguchi) استاد دانشگاه علوم توکیو در سال ۱۹۷۴ بر زبانها جاری شد. او این واژه را برای توصیف ساخت مواد یا وسایل دقیقی که دامنه تغییرات ابعاد آنها در حد نانومتر می‌باشد، به کار برد.

در سال ۱۹۸۶ واژه نانو توسط اریک درکسلر (Eric Drexler) باز آفرینی و تعریف مجدد شد. وی بعد از اخذ درجه استادی علوم کامپیوتر، با جمع‌آوری جوانان جويا و مستعد؛ نظریه نانوتکنولوژی را بنا نهاد. اولین مقاله وی در زمینه نانوتکنولوژی در سال ۱۹۹۸ و

هیچ یک از سه بعد آن در مقیاس نانو نیست. این دسته شامل نانوکامپوزیت‌ها و مواد حجیم نانو ساختار می‌باشد. توانایی برای تولید نانو ساختارها اولین سنگ بنا در فناوری نانو است.

دارورسانی یکی از مهم‌ترین و پیچیده‌ترین شاخه‌ای علم نانو تکنولوژی است که امروزه به لطف به کارگیری علوم دیگر گسترش چشمگیری داشته است. این پیشرفت‌ها به ویژه در حوزه مکانیسم و سیستم‌های دارورسانی بسیار تأثیرگذار و راهگشا است. تکنولوژی نوین دارورسانی شامل نانو ساختارهایی است که مولکول‌های دارو را حمل می‌کنند. دارورسانی هدفمند در اصطلاح مجموعه فعالیت‌هایی است که منجر به تجمع مواد دارویی در یک منطقه خاص از بدن می‌شود. بسته به محل بیماری این فعالیت‌ها ممکن است باعث رسیدن دارو به عضوی خاص، نوع خاصی از سلول و یا حتی برخی از اندام‌های درون سلولی باشد. اصلی‌ترین مزیت استفاده از دارورسانی هدفمند افزایش اثرات درمانی دارو بدون القای عوارض جانبی بر روی اندام‌ها، بافت‌ها یا سلول‌های سالم است (شکل ۴).



شکل ۴

از سال ۲۰۰۴ نانولوله‌های کربنی به‌طور گسترده به‌عنوان حامل‌های دارویی برای انتقال درون سلولی داروهای شیمی درمانی، پروتئین‌ها و ژن‌ها مورد بررسی قرار گرفتند. در دهه گذشته، پیشرفت سریع فناوری نانو ایده‌های جذاب و فرصت‌های فراوانی برای تشخیص و درمان بیماری‌ها به همراه داشته است.

امروزه نانوذرات به دلیل کاربردهای وسیعشان در زمینه‌های مختلف بیولوژیکی، دارو و پزشکی بسیار محبوب شده‌اند. از نظر ساختاری اندازه آن‌ها در حدود ۱۰۰ نانومتر می‌باشد. محدوده وسیعی از داروها همچون واکسن‌ها و مولکول‌های بیولوژیکی به وسیله این نانوذرات می‌توانند هدایت شوند.

جنس و اندازه نانو ذرات می‌باشند. نانوذرات کاربردهای مختلفی در صنایع مختلف مانند اتومبیل (نظیر ضدخش کردن بدنه، ضدبخار کردن شیشه‌ها، لاستیک‌های مقاوم و ...)، پزشکی (نظیر دارورسانی، ساخت داروهای جدید، تشخیص علائم بیماری‌ها و ...)، تصفیه آب و فاضلاب، الکترونیک، امور نظامی و ... دارند. نانو ذرات می‌توانند بسته به کاربردها در اشکال مختلف مانند کروی، بیضی، مکعبی، منشوری، ستونی و ... ساخته شوند. نانو ذرات ممکن است از یک جزء تشکیل شده باشند یا اینکه ترکیبی از چند جزء (ماده) باشند. همچنین آن‌ها می‌توانند به صورت خالص و یا ترکیبی از چند ماده مختلف باشند.

نانو مواد تک بعدی دارای دو بعد در مقیاس نانو و یک بعد آزاد می‌باشند. نانوسیم‌ها، نانومیل‌ها، نانولوله‌ها، نانوالیاف همگی جزء مواد نانو ساختار تک بعدی می‌باشند. مهم‌ترین ویژگی نانو ساختارهای تک بعدی فلزی هدایت الکتریکی آن‌ها در راستای محور سیم می‌باشد. نانوسیم‌ها بر حسب روش ساخت می‌توانند بلوری و یا بی‌شکل باشند. نانوسیم‌ها کاربردهای زیادی در بخش‌های مختلف مانند ساخت رایانه‌های بسیار کوچک با سرعت بسیار بالا، ساخت لیزرهای بسیار کوچک، ساخت دیودهای نورافشان (LED)، تشخیص بیماری‌ها، حسگر، حافظه‌های مغناطیسی و ... دارند. نانوسیم‌ها نیز می‌توانند به صورت خالص و یا ترکیبی از چند نوع ماده مختلف باشند.

نانو مواد دو بعدی دارای دو بعد آزاد و یک بعد در مقیاس نانو می‌باشند. مواد با یک بعد در مقیاس نانو عمدتاً شامل لایه‌های نازک یا پوشش‌های سطحی می‌باشند. عوامل تأثیرگذار در خواص نانو پوشش‌ها، جنس و ضخامت آن‌ها می‌باشد. به عنوان مثال سلفون‌های نگهدارنده مواد غذایی نوعی پوشش هستند.

حال اگر ضخامت آن‌ها در ابعاد نانو باشد، به آنها نانوپوشش گفته می‌شود. نانوپوشش‌ها لایه‌هایی به ضخامت ۱ تا ۱۰۰ نانومتر بوده که به صورت پوشش روی مواد دیگر قرار می‌گیرند و باعث تغییر خواص و ویژگی‌های آنها میشوند. ضخامت نانومتری آنها باعث می‌شود که با چشم دیده نشوند و به ظاهر جسم آسیبی نرسانند. برای مثال لایه‌های نازکی که روی لباس‌ها قرار می‌گیرند و باعث ضد آب شدن آنها می‌شوند. لایه‌های نازک در طول دهه‌های اخیر در زمینه‌های مختلفی از قبیل الکترونیک، شیمی، فیزیک، صنایع ساختمان، اتومبیل و ... مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

نانو مواد سه بعدی هر سه بعد آن‌ها در مقیاس آزاد است یعنی

نانوذرات کاربرد وسیعی در بهبود درمان و تشخیص بیماری‌ها دارند. از جمله کاربردهای نانوذرات می‌توان به حامل‌های دارو در بیماری‌هایی چون سرطان، بیماری‌های قلبی - عروقی و آلزایمر اشاره کرد. استفاده از این نانو حامل‌ها برای بیماری‌های عصبی چون آلزایمر بسیار کارساز می‌باشد چرا که این نانوذرات به خاطر اندازه‌ای که دارند می‌توانند از سد خونی - مغزی عبور کنند که این سد همیشه مانعی برای عبور داروها به مکان آسیب دیده در این نوع از بیماری‌های مخرب مغزی بوده است.

فعالیت‌های توسعه فناوری نانو در کشور از سال ۱۳۷۹ آغاز شد. در سال ۱۳۸۲، با شناسایی فناوری نانو به عنوان یک فناوری دارای اولویت ملی، ستاد ویژه توسعه فناوری نانو به منظور پیگیری توسعه این فناوری در کشور تشکیل شد.

دیدگاه ستاد برای توسعه فناوری نانو، تدوین چارچوب فعالیت بلند مدت کشور در این حوزه بود و در این مسیر، برنامه راهبردی ده‌ساله فناوری نانو در ستاد تهیه و در مرداد ماه ۱۳۸۴ به تصویب هیئت دولت رسید. در اردیبهشت ۱۳۸۵، شورای عالی انقلاب فرهنگی، ضمن تأکید بر اجرای دقیق «سند راهبرد آینده»، سیاست‌ها و راهبردهای توسعه و ارتقای این فناوری در کشور را تصویب کرد. هدف این سند قرار گرفتن در میان ۱۵ کشور برتر جهان در حوزه فناوری نانو و تلاش برای ارتقاء مداوم این جایگاه به منظور تولید ثروت و بهبود کیفیت زندگی مردم است. ترویج و آموزش عمومی و به کارگیری فناوری نانو و فراهم‌سازی و تقویت زیرساخت‌های لازم برای توسعه این فناوری، ارتقاء صنایع با به کارگیری فناوری نانو و گسترش بازار نانو و تسهیل و تسریع تجاری‌سازی از طریق فراهم‌سازی خدمات توسعه فناوری مورد نیاز فناوران و شرکت‌های دانش‌بنیان از جمله اهداف و برنامه‌های ستاد نانو هستند.

فناوری نانو واژه‌ای است کلی که به تمام فناوری‌های پیشرفته در عرصه کار با مقیاس نانو اطلاق می‌شود. این فناوری تولید کارآمد مواد و دستگاه‌ها و سیستم‌ها با کنترل ماده در مقیاس طولی نانومتر و بهره‌برداری از خواص و پدیده‌های نوظهوری است که در مقیاس نانو توسعه یافته‌اند. فناوری نانو بیانگر رهگذری به سوی دنیایی جدید هستند. سفر به اعماق سرزمین اتم‌ها و مولکول‌ها نوید دهنده اثرات اجتماعی شگفت‌انگیزی است؛ در علوم بنیادین، در فناوری‌های نو، در طراحی مهندسی و تولیدات، در پزشکی و سلامت و در آموزش. در این راستا، ریاضیات نقش موثری دارد چرا که همگان بر این نکته

توافق دارند که پیشرفت‌های بزرگ، مستلزم تعامل میان مهندسان، ژنتیست‌ها، شیمی‌دانان، فیزیکدانان، داروسازان، ریاضیدانان و علوم رایانه‌ای‌ها است. شکاف میان علوم و فناوری، میان آموزش و پژوهش، میان دانشگاه و صنعت، میان صنعت و بازار بر مجموعه تأثیرگذار خواهد بود. دانش ریاضیات به‌عنوان خط مقدم جبهه علم مطرح است. ویژگی بدیهی ریاضیات در علوم نانو «محاسبات علمی» است که به عنوان واسطه‌ای بین آزمایش و تئوری در تفسیر آزمایش‌ها و پیش‌بینی نتایج در مقیاس اتمی و مولکولی بر پایه تئوری‌های اتمی نقش مهمی دارد. با توجه به اینکه انجام تست‌های تجربی روی سیستم‌های در مقیاس نانو بسیار زمانبر و پرهزینه می‌باشد، لذا شبیه‌سازی رفتار دینامیکی این سیستم‌ها توسعه فراوانی پیدا کرده است. با توجه به این که در عمل رفتار سیستم‌ها غیرخطی می‌باشد، بنابراین محققان همیشه درصدد دستیابی به آن دسته از روش‌هایی بوده‌اند که منجر به نتایج دقیق‌تری شود. نظر به اینکه ارائه روش تحلیلی برای مسائل غیرخطی بسیار دشوار می‌باشد، به همین لحاظ معمولاً از روش‌های عددی یا تقریبی برای تحلیل این سیستم‌ها استفاده می‌شود. جهت کسب اطلاعات بیشتر به مراجع این مقاله مراجعه شود.

واژه‌های تخصصی	
نانولوله کربنی	Carbon Nanotube
فناوری نانو	Nano Technology
دارورسانی	Drug Delivery
نانو ذرات	Nano Particle
نانو ساختار	Nano Structure
نانو مواد	Nano Material
محاسبات علمی	Scientific Computing
بعد	Dimension

مراجع

۱. نانو تکنولوژی کاربردی، یوسف ناصر زاده، انتشارات نظری، ۱۳۹۲.
۲. آشنایی با علوم و فناوری نانو، فرزاد حسینی‌نسب، محسن افسری‌ولایتی، سید معصومه قاسمی‌نژاد لیچانی، انتشارات کوچک آموز، ۱۳۹۴.
۳. الگوریتم‌های کارا برای حل تقریبی مدل‌های ریاضی مرتبط با ساختارهای نانو، رساله دکترا، بیت‌اله رضایپور، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، ۱۳۹۹.
۴. سایت ستاد نانو nano.ir

5. <http://www.nanos.blogfa.com/post/29>

رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول با روش نقطه‌یابی و انتقال



مقدمه:

هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود، حرکت تناوبی است. جهان پر از حرکت‌های تناوبی است که از آن جمله می‌توان از نوسان‌های رقاصک ساعت مچی، سیم تار مرتعش، جرم آویزان متصل به فنر در حال نوسان، عقربه کوچک ساعت که بعد از طی ۱۲ ساعت دوباره مسیر اولیه را تکرار می‌کند و پاندول ساعت که هر رفت و برگشت را در مدت یک ثانیه طی می‌کند و دوباره مسیر رفت و برگشت اولیه را تکرار می‌کند. در این مقاله توابع متناوبی را رسم می‌کنیم، که در فاصله‌های مساوی تکرار می‌شوند. چنان‌که خواهیم دید، توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول نمونه‌ای از این نوع توابع هستند.

■ تابع متناوب

تابع حقیقی f را متناوب گوئیم، هرگاه کوچک‌ترین مقدار مثبتی مانند $T \neq 0$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر x واقع در دامنه f ، $T \pm x$ در دامنه f باشد و $f(x+T) = f(x)$. در این صورت T را دوره تناوب تابع f می‌گوئیم.

■ مسأله.

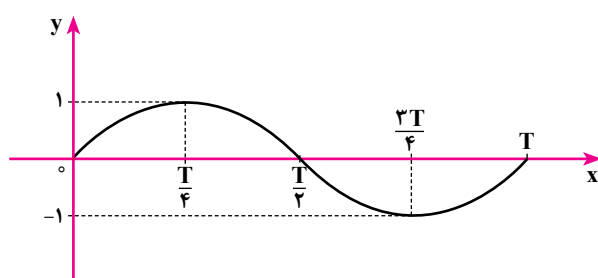
دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \sin(ax + \beta)$ را به‌دست آورید.

حل: 

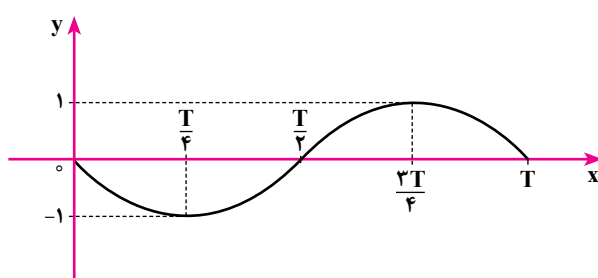
$$f(x+T) = f(x) \\ \Rightarrow \sin[a(x+T) + \beta] = \sin(ax + \beta)$$

مرحله سوم: منحنی نمودار تابع با ضابطه $y = \sin ax$ و $y = -\sin ax$ (یا $y = \cos ax$ و $y = -\cos ax$) را به کمک جدول‌های زیر و با استفاده از روش نقطه‌یابی در ناحیه $[0, T]$ (دوره تناوب تابع است) رسم می‌کنیم.

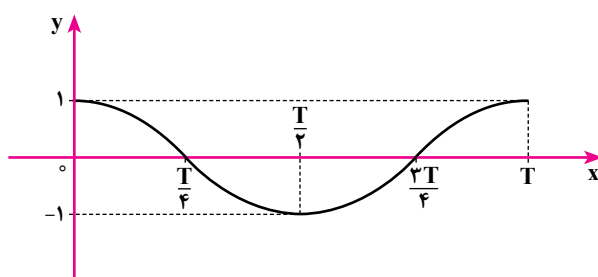
x	۰	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y = \sin ax$	۰	۱	۰	-۱	۰



x	۰	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y = -x \sin ax$	۰	-۱	۰	۱	۰



x	۰	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y = \cos ax$	۱	۰	-۱	۰	۱



$$\Rightarrow ax + aT + \beta = 2k\pi + ax + \beta \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow T = \frac{2k\pi}{a}$$

کوچک‌ترین مقدار مثبت T به ازای $k=1$ به دست می‌آید، چون $D_f = \mathbb{R}$ بدیهی است که اگر $x \in D_f$ آن‌گاه $x \pm T \in D_f$.

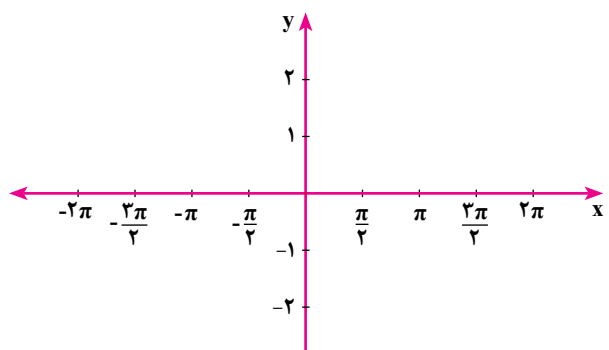
بنابراین دوره تناوب تابع $f(x) = \sin(ax + \beta)$ برابر است با $T = \frac{2\pi}{a}$.

به طریق مشابه می‌توان بررسی کرد، که دوره تناوب تابع $f(x) = \cos(ax + \beta)$ به صورت $T = \frac{2\pi}{a}$ می‌باشد.

◀ مراحل رسم نمودار تابع با ضابطه $f(x) = k \sin(ax + \beta) + l$ که در آن: $l \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ و $k \neq 0$ و β زاویه‌ای بر حسب رادیان است.

با توجه به مطالب گفته شده درباره تابع متناوب به سادگی درمی‌یابیم که توابعی به صورت بالا متناوب می‌باشند. بنابراین شکل آنها در فاصله‌های برابر به طور دقیق تکرار می‌شوند، لذا کافی است نمودار آنها را در فاصله $[0, T]$ رسم نماییم، سپس در فاصله‌های برابر با طول دوره تناوب شکل تابع را به طور دقیق تکرار کنیم، تا اینکه نمودار تابع در هر فاصله‌ای از صفحه مشخص باشد. برای رسم شکل این نوع توابع مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

مرحله اول: در دستگاه مختصات xOy روی محور x ها $\frac{\pi}{2}$ را تقریباً به اندازه سه واحد در نظر می‌گیریم. بنابراین $\frac{\pi}{2}$ را $1/5$ واحد و $\frac{3\pi}{2}$ را $4/5$ واحد و 2π را 6 واحد انتخاب می‌کنیم.



مرحله دوم: دوره تناوب تابع را با استفاده از فرمول $T = \frac{2\pi}{a}$ به دست می‌آوریم.

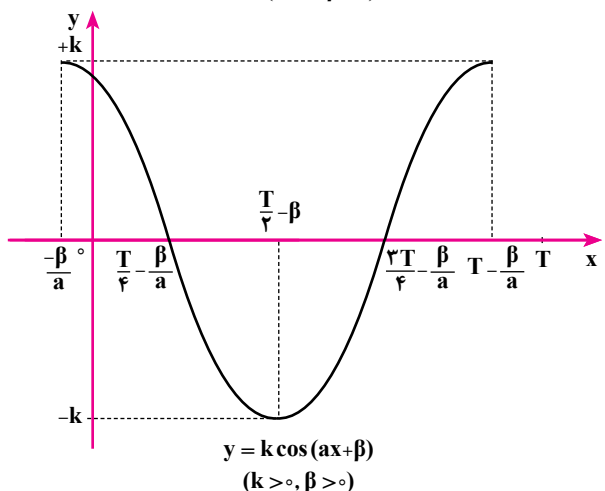
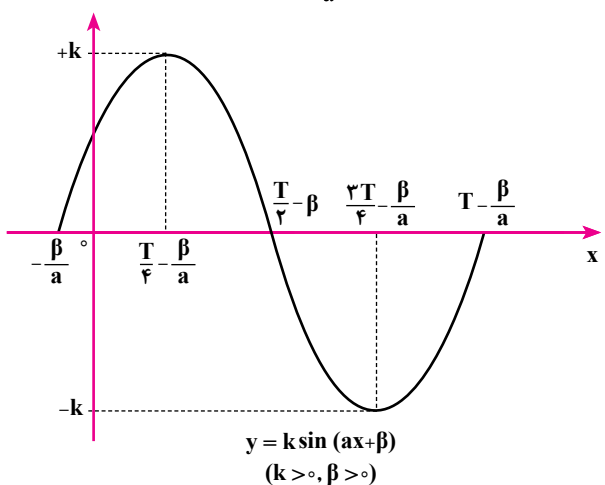
مرحله پنجم: منحنی نمایش تابع با ضابطه

$y = k \sin(ax + \beta)$ یا $y = k \cos(ax + \beta)$ را رسم می‌کنیم:

اگر $\beta > 0$ زاویه‌ای بر حسب رادیان، آن‌گاه منحنی‌های به‌دست آمده از مرحله چهارم را به اندازه $\frac{\beta}{a}$ واحد رادیان در جهت منفی محور طول‌ها منتقل می‌کنیم. حال اگر $\beta < 0$ ، آن‌گاه منحنی‌های به‌دست آمده از مرحله چهارم را به اندازه $\frac{\beta}{a}$ واحد رادیان در جهت مثبت محور طول‌ها انتقال می‌دهیم.

با فرض این‌که $\beta > 0$ باشد، نمودار منحنی‌ها به‌صورت زیر

به‌دست می‌آید:

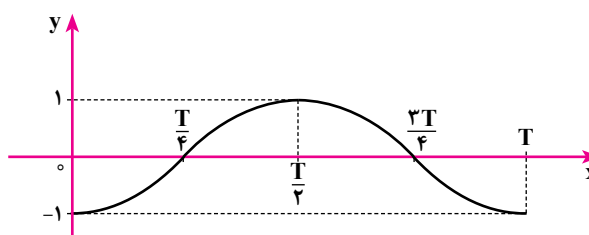


مرحله ششم: در این مرحله منحنی نمایش توابع با ضابطه

$y = k \sin(ax + \beta) + l$ (یا $y = k \cos(ax + \beta) + l$) را رسم

می‌کنیم. اگر $l > 0$ (عدد حقیقی است)، آن‌گاه منحنی‌های به‌دست آمده از مرحله پنجم را به اندازه l واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها بالا می‌بریم و اگر $l < 0$ ، آن‌گاه منحنی‌های به‌دست آمده از مرحله

x	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y = -\cos x$	-1	0	1	0	-1



مرحله چهارم: نمایش منحنی توابع با ضابطه $y = k \sin ax$

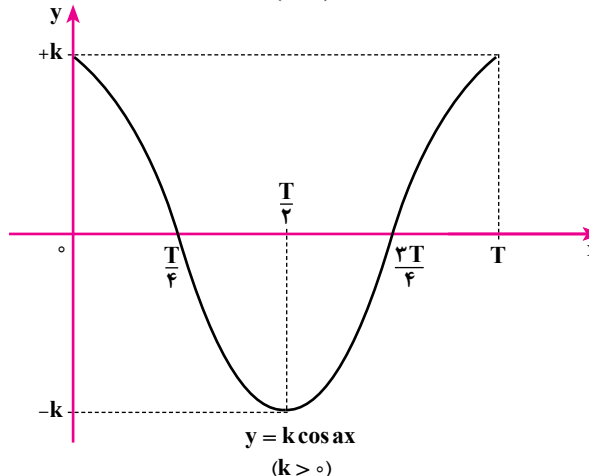
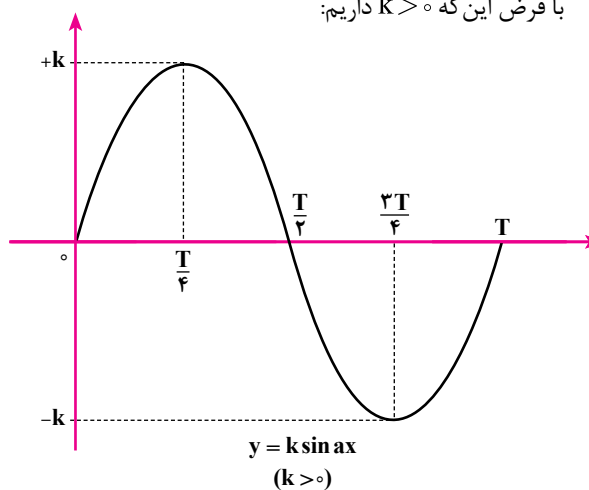
(یا $y = k \cos ax$) را رسم می‌کنیم. برای این منظور باید عرض

نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی‌های نمودار مرحله سوم را از نقاط

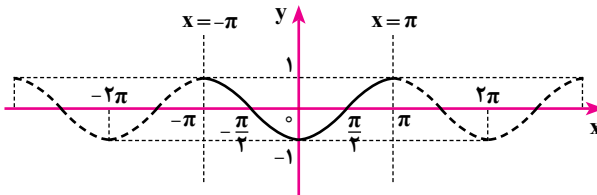
$+1$ و -1 به‌ترتیب به نقاط $+k$ و $-k$ انتقال دهیم، تا این‌که منحنی

آنها به‌صورت زیر به‌دست آید.

با فرض این‌که $k > 0$ داریم:



x	0	$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{T}{2} = \pi$	$\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$	$T = 2\pi$
$y = -\cos x$	-1	0	1	0	-1



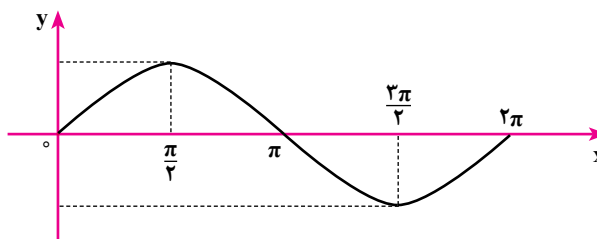
مثال ۲

با استفاده از رسم منحنی توابع مثلثاتی نشان دهید که $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

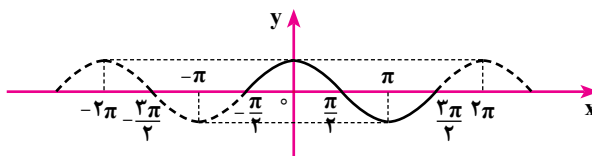
حل:

دوره تناوب $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ برابر با $T = 2\pi$ می باشد، بنابراین نمودار $y = \sin x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم.

x	0	$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{T}{2} = \pi$	$\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$	$T = 2\pi$
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0

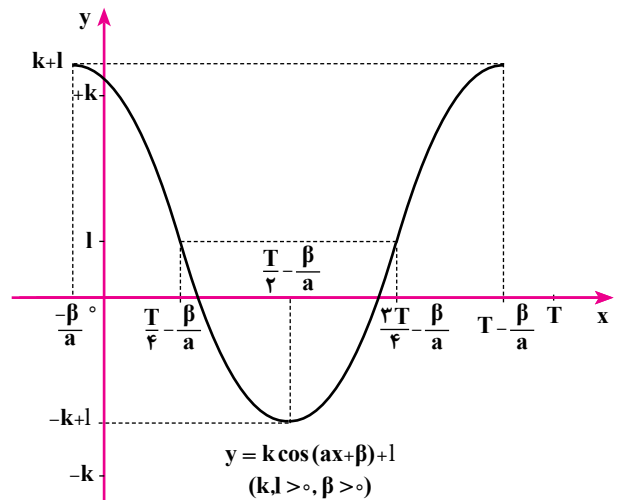
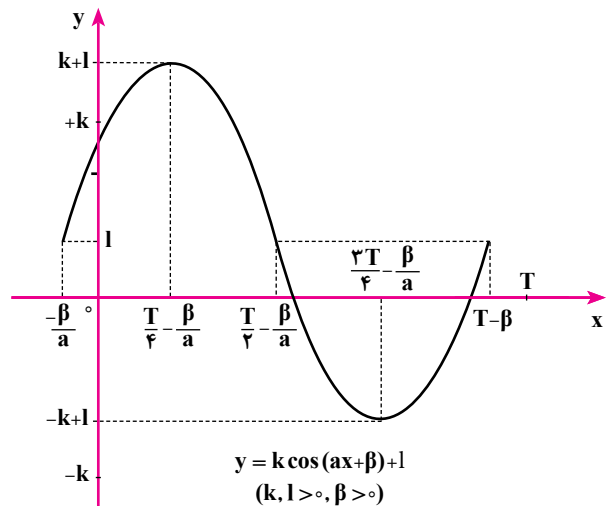


اکنون برای رسم $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ کافی است شکل مرحله قبل را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ رادیان به طرف چپ منتقل کنیم. سپس منحنی نمایش این تابع را در فاصله های مساوی 2π تکرار می کنیم.



همان طور که ملاحظه می کنید منحنی بالا نمایش تابع با ضابطه $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ و هم چنین منحنی نمایش تابع $y = \cos x$ می باشد. در فیزیک اصطلاحاً می گویند منحنی نمایش $y = \sin x$ $\frac{\pi}{2}$ تقدم فاز نسبت به $y = \cos x$ دارد، یعنی این که منحنی

پنجم را به اندازه l واحد در جهت منفی محور عرض ها پایین می بریم. با فرض این که $l > 0$ شکل توابع بالا به صورت زیر می باشد:



مثال ۱

منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = -\cos x$ را در فاصله $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

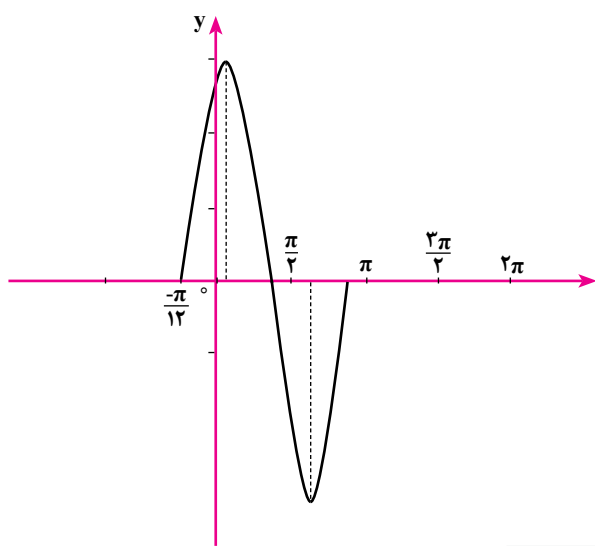
حل:

دوره تناوب این تابع $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ می باشد بنابراین به کمک جدول زیر و روش نقطه یابی نمودار این تابع را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم. سپس در فاصله های مساوی 2π شکل آن را به طور دقیق تکرار می کنیم و قسمتی از منحنی که بین دو خط $x = -\pi$ و $x = +\pi$ قرار دارد، شکل مورد نظر ما می باشد.

برای رسم منحنی نمایش $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ کافی است (نمودار ۲) را به اندازه $\frac{\pi}{12}$ رادیان به طرف چپ منتقل کنیم.

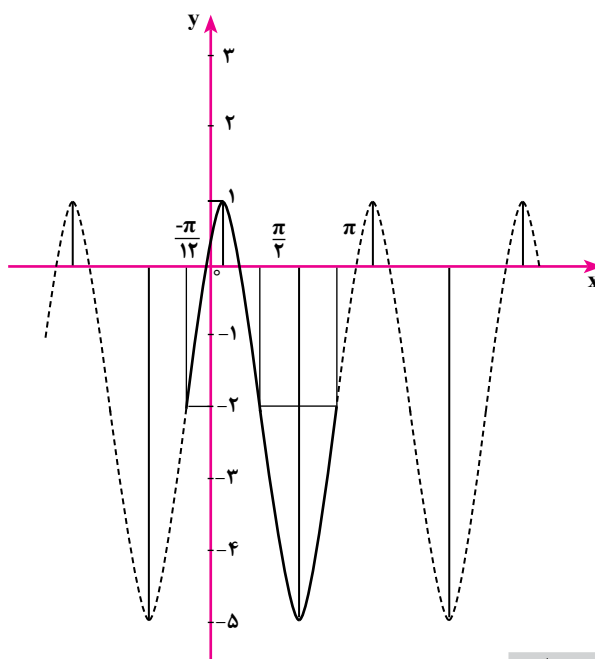
$$y = 3 \sin 2(x + \frac{\pi}{12})$$

بنابراین:



نمودار ۳

در مرحله آخر برای رسم $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2$ کافی است (نمودار ۳) را به اندازه ۲ واحد به طرف پایین منتقل کنیم. سپس در فاصله مساوی π شکل آن را به طور دقیق تکرار کنیم.



نمودار ۴

نمایش تابع $y = \sin x$ به اندازه $\frac{\pi}{3}$ رادیان از منحنی نمایش تابع $y = \cos x$ جلوتر است.

مثال ۳

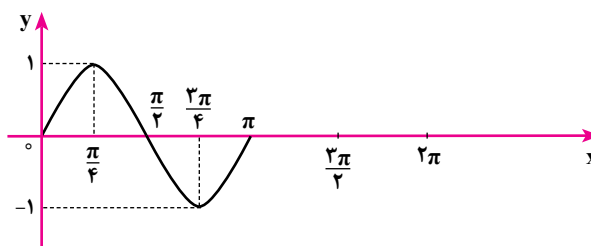
منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2$ را

رسم کنید.

حل:

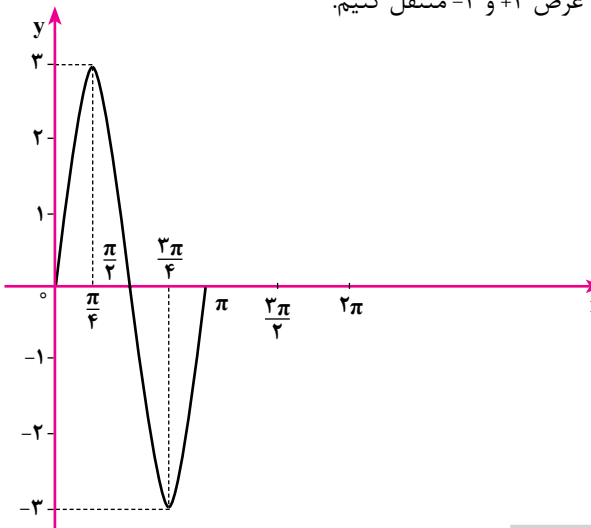
دوره تناوب تابع فوق $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ می باشد. بنابراین به کمک جدول زیر و با روش نقطه یابی ابتدا نمودار $y = \sin 2x$ را در فاصله $[0, \pi]$ رسم می کنیم.

x	0	$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{4}$	$T = \pi$
$y = \sin 2x$	0	1	0	-1	0

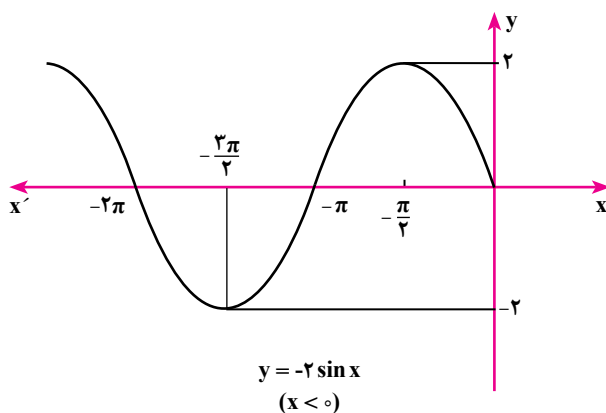


نمودار ۱

اکنون منحنی نمایش $y = 3 \sin 2x$ را رسم می کنیم. برای این کار کافی است نقاط +۳ و -۳ را روی محور عرض ها مشخص کنیم و نقاط ماکزیمم و مینیمم (نمودار ۱) را به ترتیب به نقاط با عرض +۳ و -۳ منتقل کنیم.

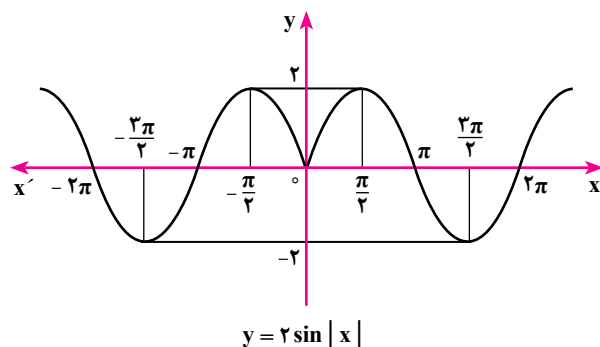


نمودار ۲



شکل (ب)

اکنون اگر (شکل الف و ب) را در یک دستگاه مختصات رسم نماییم، منحنی نمایش تابع $y = 2 \sin |x|$ را خواهیم داشت:



مثال ۶

نمودار تابع با ضابطه $y = [\sin x]$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله اول: ابتدا منحنی تابع با ضابطه $y = \sin x$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

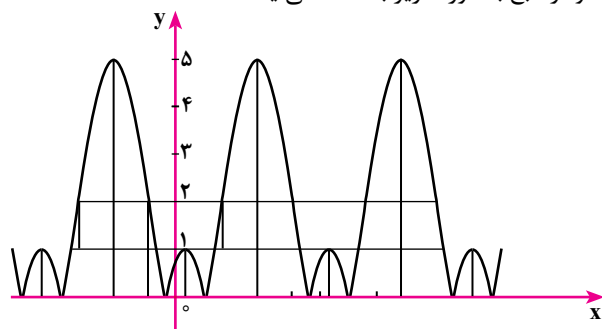
مرحله دوم: سه خط $y = 1$ و $y = 0$ و $y = -1$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی را که روی این سه خط واقع می‌باشند، با نقاطی توپر مشخص می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 0$ و $y = -1$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) را روی خط $y = -1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد (به غیر از

مثال ۴

منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = |3 \sin (2x + \frac{\pi}{6}) - 2|$ را رسم کنید.

حل:

ابتدا منحنی نمایش تابع $y = 3 \sin (2x + \frac{\pi}{6}) - 2$ را رسم می‌کنیم (نمودار ۴)، سپس قرینه قسمتی از منحنی نمایش تابع که زیر محور طول‌هاست نسبت به محور x ها پیدا می‌کنیم. در نتیجه نمودار تابع به صورت زیر به دست می‌آید:



مثال ۵

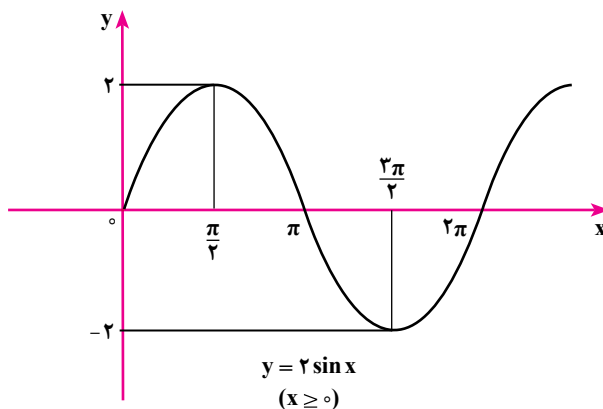
منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = 2 \sin |x|$ را رسم کنید.

حل:

با توجه به خواص قدرمطلق داریم:

$$\sin |x| = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$$

برای رسم منحنی نمایش این تابع ابتدا $y = 2 \sin x$ را برای $x \geq 0$ رسم می‌کنیم، سپس $y = -2 \sin x$ را برای $x < 0$ رسم خواهیم کرد.



شکل (الف)

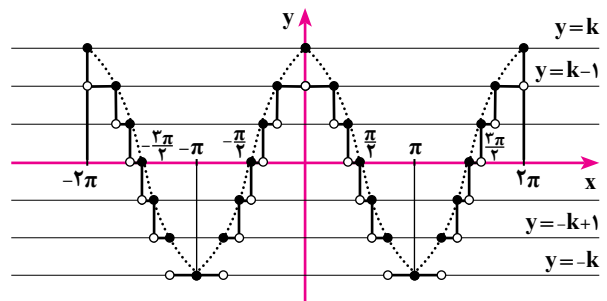
مثال ۸

نمودار تابع با ضابطه $y = [k \cos x]$ (که در آن $k \geq 1$ و $k \in \mathbb{Z}$) را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله اول: ابتدا منحنی $y = k \cos x$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

مرحله دوم: خطوط $y = -k + 1$ و $y = -k$ و $y = -k + 2$ و $y = -k + 1 \dots$ و $y = k$ و $y = k - 1$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی که روی این خطوط واقع می‌باشند را پررنگ می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -k$ و $y = -k + 1$ قرار دارد، روی خط $y = -k$ تصویر می‌کنیم، و ... به همین ترتیب در مرحله آخر قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = k - 1$ و $y = k$ قرار دارد، روی خط $y = k - 1$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع فوق را به دست آوریم.



مثال ۹

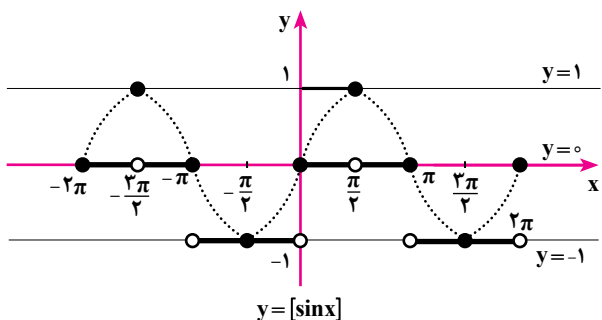
نمودار تابع با ضابطه $y = [k \sin x]$ (که در آن $0 \leq k < 1$) را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله اول: چون $0 \leq k < 1$ بنابراین منحنی نمایش تابع $y = k \sin x$ همواره بین دو خط $y = 1$ و $y = -1$ واقع می‌شود.

مرحله دوم: ابتدا نقاطی از منحنی را که روی خط $y = 0$ قرار دارند، پررنگ می‌کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -1$ و $y = 0$ قرار دارد، روی خط $y = -1$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع فوق را به دست آوریم.

نقاط توپر را روی خط $y = 0$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع $y = [\sin x]$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ به صورت زیر به دست آوریم.



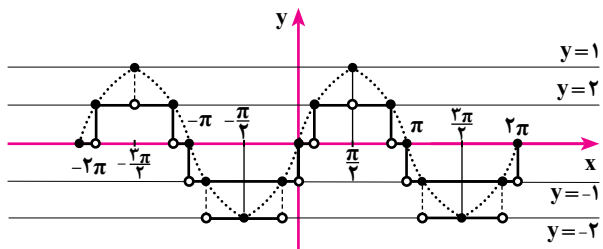
مثال ۷

نمودار تابع با ضابطه $y = [2 \sin x]$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله اول: با توجه به مطالب گفته شده درباره رسم توابع مثلثاتی درجه اول، ابتدا منحنی نمایش $y = +2 \sin x$ را رسم می‌کنیم.

مرحله دوم: خطوط $y = 0$ ، $y = -1$ ، $y = -2$ و $y = 2$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی که روی این خطوط قرار دارند را پررنگ می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = -2$ و $y = -1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y = -2$ تصویر می‌کنیم و قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = -1$ و $y = 0$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y = -1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y = 0$ تصویر می‌کنیم و در مرحله آخر قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 1$ و $y = 2$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y = 1$ تصویر می‌کنیم تا نمودار تابع فوق را به دست آوریم.



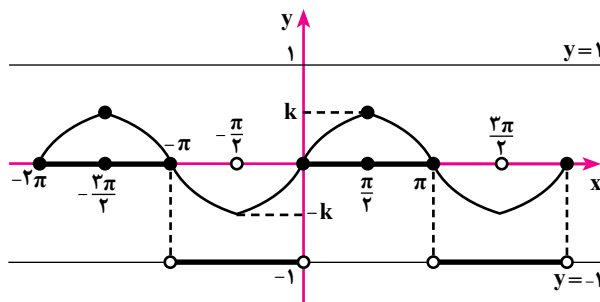
اولین شاخه و انشعاب علمی، آن شعبه‌ای بود که مطلقاً احتیاج به تجربه نداشت و برای پیدایش آن حداقل توجه و علاقه‌مندی لازم بود. اما چه کسی برای این کار علاقه‌مندتر از چوپانی است که چون گله خود را به چراگاه می‌برد، شبانگاه هنگام مراجعت می‌خواهد بداند که همه آن‌ها به جای خود هستند یا نه؟ خواهید گفت که برای اطمینان از این مطلب کافی بود که چوپان گوسفندان خود را بشمارد، اما چوپان عهد حجر هنوز شمردن نمی‌دانست و با این حال طبعاً چهل او مانع آن نمی‌گردید که وی تعداد واقعی آن‌ها را معین کند، زیرا مرغ خانگی نیز که حساب و حساب کردن نمی‌داند هنگامی که یکی از جوجگان او غائب باشند ناله و فریاد می‌کند و او را می‌طلبد.

اما به زودی چه چوپان و چه آن کشاورزی که احتیاج داشت نا وسعت مزرعه خود را تعیین کند و چه بسیار کسان دیگر در نتیجه احتیاج مجبور شدند نوعی وسیله شمارش دقیق‌تر، غیر از غریزه طبیعی خود، به‌وجود آورند و برای این کار انگشتان دست، دستگاه حساب کردن آماده و مهبیایی بود.



* تاریخ علوم، پی. یرروسو

می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = 1$ و $y = 0$ قرار دارد، روی خط $y = 0$ تصویر می‌کنیم. تا نمودار تابع فوق را به‌دست آوریم.



تمرین

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

۱. $y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 4$

۲. $y = 4\sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$

۳. $y = \left| 3\sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \right|$

۴. $y = -5\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$



* پی‌نوشت

۱. به‌طور کلی قسمتی از منحنی که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد را روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم. یعنی اگر قسمتی از نمودار منحنی بین دو خط افقی متوالی $y = i$ و $y = i+1$ قرار داشته باشد، آن را روی خط $y = i$ تصویر می‌نماییم.

منابع

۱. کتاب حسابان ۱ و ۲.
۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی - لیتلهد - (جلد اول).
۳. فیزیک هالیدی - (جلد اول).

آموزش ترجمه متون ریاضی فارسی به انگلیسی (۶)



زوجیت یا «دوتایی» در اعداد صحیح:

زوجیت در عددهای صحیح اشاره دارد به اینکه هر عدد صحیح یا فرد است یا زوج. عدد صحیح n فرد است، هرگاه باقی مانده تقسیم آن بر ۲ مساوی یک باشد؛ و آن به شکل $n=2k+1$ است. در غیر این صورت، عدد n زوج و به شکل $n=2k$ است.

زوج = زوج ± زوج	فرد = فرد ± زوج
زوج = فرد ± فرد	زوج = زوج × زوج
زوج = فرد × زوج	فرد = فرد × فرد

مجموع دو عدد زوج است، اگر هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. حاصل ضرب دو عدد زوج است، اگر حداقل یکی از آن عددها زوج باشند. این خواص به صورت مقابل بیان می شوند:

مقسوم علیه ها (شمارنده ها):

فرض کنیم a و b اعدادی صحیح باشند که $a \neq 0$ باشد. در این صورت، به a مقسوم علیه b گفته می شود (بیان می شود $a|b$)، اگر یک عدد صحیح k وجود داشته باشد، به طوری که: $b=ka$. مقسوم علیه n را «مقسوم علیه بدیهی» می نامیم، هرگاه مساوی با ۱ یا خود n باشد. در غیر این صورت آن را «مقسوم علیه نابديهی» می نامیم. مقسوم علیه سره برای n مقسوم علیه غیر از خود n است.

تعریف عدد اول:

عدد اول آن است که فقط مقسوم علیه های بدیهی دارد. تعداد عددهای اول نامحدود است. قضیه اساسی حساب بیان می دارد که هر عدد صحیح می تواند به حاصل ضرب عددهای اول تجزیه شود.

لغت ها و اصطلاحات مهم

1) Parity	زوجیت	6) Divisor	مقسوم علیه
2) Integer	صحیح	7) Product	ضرب
3) Remainder	باقی مانده	8) Trivial	بدیهی
4) Odd	فرد	9) Prime number	عدد اول
5) Even	زوج	10) Infinit	نامحدود، بی کران، بی نهایت

Parity of Integers:

The parity of an integer refers to whether the integer is odd or even. An integer n is odd if there is a remainder of one when it is divided by two, and it is of the form $n=2k+1$. Otherwise, the number is even and of the form $n=2k$.

The sum of two numbers is even if both are even or both are odd. The product of two numbers is even if at least one of the numbers is even. These properties are expressed as.

$\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$	$\text{even} \pm \text{odd} = \text{odd}$
$\text{odd} \pm \text{odd} = \text{even}$	$\text{even} \times \text{even} = \text{even}$
$\text{even} \times \text{odd} = \text{even}$	$\text{odd} \times \text{odd} = \text{odd}$

Divisors

Let a and b be integers with $a \neq 0$ then a is said to be a divisor of b (denoted by $a|b$) if there exists an integer k such that $b=ka$.

A divisor of n is called a trivial divisor if it is either 1 or n itself; otherwise it is called a nontrivial divisor. A proper divisor of n is a divisor of n other than n itself.

Definition (Prime Number)

A prime number is a number whose only divisors are trivial. There are an infinite number of a prime number.

The *fundamental theorem of arithmetic* states that every integer number can be factored as the product of prime numbers.

شما ترجمه کنید:

2.2 Divisibility, Primes, and Composites

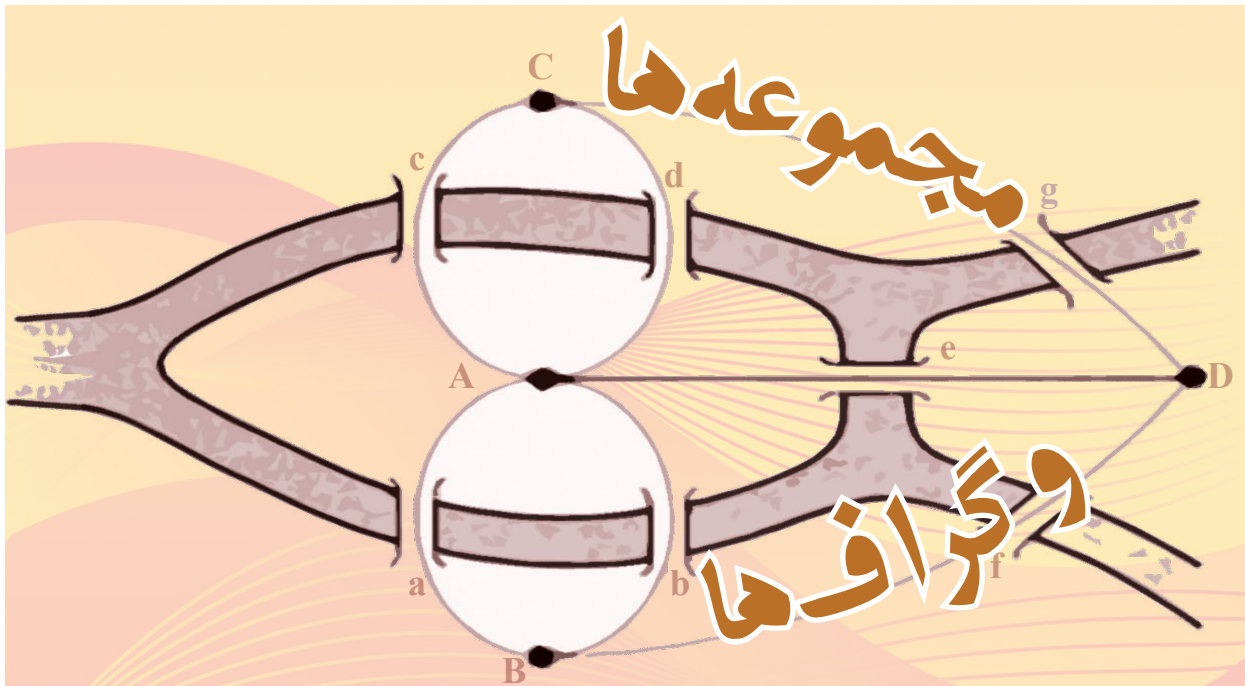
The starting point for the theory of numbers is **divisibility**.

Definition 2.2.1. If a, b are integers we say that a **divides** b , or that a is a **factor** or **divisor** of b , if there exists an integer q such that $b=aq$. We denote this by $a|b$. Then b is a **multiple** of a . If $b>1$ is an integer whose only factors are $\pm 1, \pm b$ then b is a prime; otherwise, $b>1$ is **composit**.

The following properties of divisibility are straightforward consequences of the definition.

Theorem 2.2.1.

- (1) $a|b \Rightarrow a|bc$ for any integer c .
- (2) $a|b$ and $b|c$ implies $a|c$.
- (3) $a|b$ and $a|c$ implies that $a|(bx+cy)$ for any integer x, y .
- (4) $a|b$ and $b|a$ implies that $a=\pm b$.
- (5) If $a|b$ and $a>0, b>0$ then $a \leq b$.
- (6) $a|b$ if and only if $ca|cb$ for any integer $c \neq 0$.
- (7) $a|0$ for all $a \in \mathbb{Z}$ and $0|a$ only for $a=0$.
- (8) $a|\pm 1$ only for $a=\pm 1$.

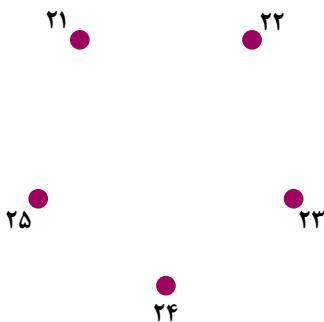


اشاره

در طول تاریخ ریاضیات همواره گراف ها و مدل سازی گراف ابزار مفیدی برای حل بسیاری از مسائل ریاضی و غیر ریاضی در زمینه های مختلف بوده اند. گراف ها به دلیل جذابیت، سادگی و کاربردی بودن راه را برای حل مسائل هموار می کنند. در این مقاله به شما نشان می دهیم چگونه با داشتن یک مجموعه دلخواه از اعداد، می توان گراف مرتبط با این مجموعه را رسم کرد. در این جا به شما دو مدل رسم گراف با استفاده از مجموعه ها را معرفی می کنیم. در ریاضیات دانشگاهی ارتباط این دو نوع گراف و مجموعه ها در شاخه گراف جبری مقطع دکتری بسیار حائز اهمیت است.

حل:

طبق تعریف اعضای مجموعه رئوس گراف خواهند بود.



حالا دو رأس در صورتی مجاورند که دارای مقسوم علیه مشترک بزرگتر از یک باشند (برای راحتی بزرگترین مقسوم علیه مشترک

اولین مدل سازی گرافی که به شما معرفی می کنیم گراف مقسوم علیه مشترک^۱ نام دارد. این گراف را با $\pi(V)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف: فرض کنید V یک زیر مجموعه دلخواه از اعداد طبیعی بزرگتر از یک باشد اعضای V را رئوس گراف در نظر می گیریم و دو رأس در صورتی مجاورند که دارای مقسوم علیه مشترک بزرگتر از یک باشند. به گرافی که روی مجموعه V به صورت بالا رسم می کنیم گراف مقسوم علیه مشترک گفته می شود.

مثال ۱

روی مجموعه $V_1 = \{21, 22, 23, 24, 25\}$ گراف مقسوم علیه مشترک را رسم کنید.



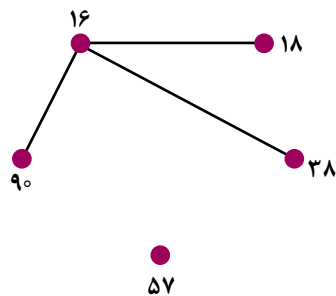
حل:

رئوس گراف اعضای مجموعه V_3 هستند اکنون بررسی می‌کنیم که کدام یک از اعضای مجموعه V_3 دارای مقسوم علیه مشترک هستند.

$$(16, 18) = 2 \quad (16, 38) = 2$$

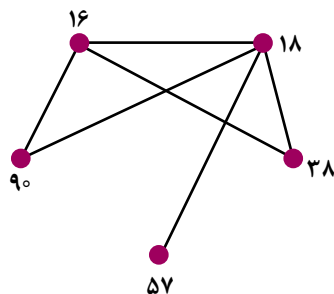
$$(16, 57) = 1 \quad (16, 90) = 2$$

پس رأس ۱۶ با تمام رئوس به جز ۵۷ مجاور است.



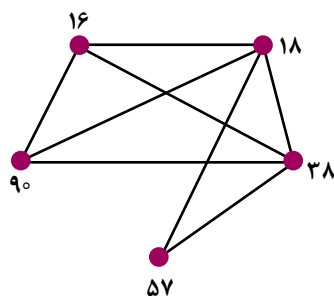
$$(18, 38) = 2 \quad (18, 57) = 3 \quad (18, 90) = 9$$

رأس ۱۸ هم با تمام رئوس دیگر مجاور است.



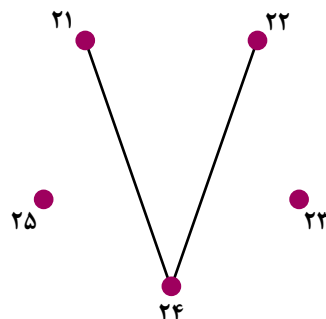
$$(38, 57) = 19 \quad (38, 90) = 2$$

پس رأس ۳۸ علاوه بر دو رأس ۱۶ و ۱۸ با ۵۷ و ۹۰ هم مجاور است.



یعنی ب. م. م را بررسی می‌کنیم.

داریم $(24, 22) = 2$ و $(24, 21) = 3$ یعنی دو رأس ۲۴ و ۲۲ و دو رأس ۲۴ و ۲۱ با هم مجاورند ولی بقیه رأس‌ها نسبت به هم اول هستند و مجاور نیستند پس گراف $\pi(V_1)$ به صورت زیر رسم می‌شود.



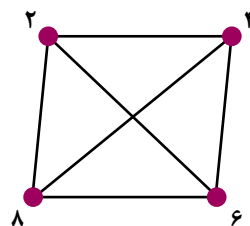
مثال ۲

روی مجموعه $V_4 = \{2, 4, 6, 8\}$ گراف مقسوم علیه مشترک را رسم کنید.



حل:

رئوس گراف اعضای مجموعه V_4 خواهد بود و از آنجا که تمام اعضای مجموعه V_4 زوج هستند پس دارای مقسوم علیه مشترک ۲ هستند لذا تمام رئوس با یکدیگر مجاورند، پس $\pi(V_4)$ به صورت زیر رسم می‌شود.

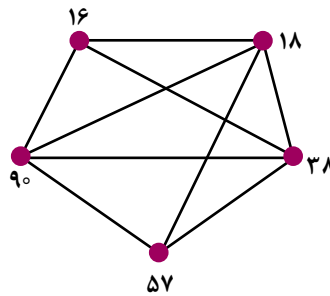


همان طور که ملاحظه می‌کنید گراف $\pi(V_4)$ یک گراف کامل است (K_4) .

مثال ۳

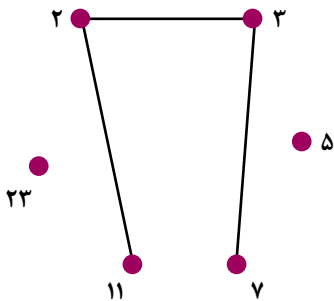
روی مجموعه $V_3 = \{16, 18, 38, 57, 90\}$ گراف مقسوم علیه مشترک را رسم کنید.

$\pi(V_p) = (57, 90)$ پس دو رأس ۵۷ و ۹۰ هم با یکدیگر مجاور هستند و گراف نهایی $\pi(V_p)$ به صورت زیر خواهد بود.



طبق تعریف دو رأس با هم مجاور خواهند بود اگر ضرب آن‌ها عضوی از $V_p = \{21, 22, 23, 24, 25\}$ را عا د کند. دو رأس ۲ و ۳ با هم مجاور خواهند بود چون ضرب آن‌ها یعنی ۶، عدد ۲۴ از مجموعه V_p را می‌شمارد.

دو رأس ۲ و ۵ مجاور نیستند چون ضرب آن‌ها یعنی ۱۰، عددی از مجموعه V_p را عا د نمی‌کند. به همین دلیل دو رأس ۲ و ۷ مجاور نیستند. ولی ۲ و ۱۱ مجاورند زیرا ضرب آن‌ها یعنی ۲۲، عدد ۲۲ از مجموعه V_p را عا د می‌کند. با همین روش به بررسی سایر رئوس می‌پردازیم و تنها دو رأس دیگر مجاور خواهند بود. ۳ و ۷ مجاورند زیرا ۲۱، عدد ۲۱ از مجموعه V_p را عا د می‌کند. بقیه رئوس مجاور نیستند چون ضرب آن‌ها عددی از مجموعه V_p را عا د نمی‌کند پس گراف $\Delta(V_p)$ به صورت زیر خواهند بود.



مثال ۵

روی مجموعه $V_p = \{2, 4, 6, 8\}$ گراف رأس اول را رسم کنید.

حل:

ابتدا مانند مثال قبل شمارنده‌های اول اعضای V_p را پیدا می‌کنیم.

دومین مدل سازی گرافی که در این مقاله به شما معرفی می‌کنیم گراف رأس اول^۲ نام دارد این گراف را با $\Delta(V)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف: فرض کنید V یک مجموعه دلخواه از اعداد طبیعی باشد و $p(V)$ مجموعه شمارنده‌های اول اعضای V باشد. رئوس گراف $\Delta(V)$ را اعضای مجموعه $p(V)$ در نظر می‌گیریم و دو رأس p و q با هم مجاورند اگر ضرب آن‌ها یعنی $p \times q$ یکی از اعداد مجموعه V را عا د کند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۴

روی مجموعه $V_p = \{21, 22, 23, 24, 25\}$ گراف رأس اول را رسم کنید.

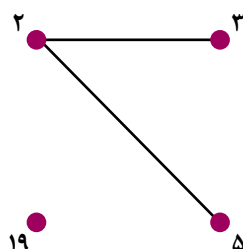
حل:

ابتدا مجموعه $p(V_p)$ را پیدا می‌کنیم برای این کار شمارنده‌های اول اعداد V_p را به دست می‌آوریم.

اعداد	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵
شمارنده‌های اول	۳ و ۷	۲ و ۱۱	۲۳	۲ و ۳	۵

پس $p(v_p) = \{2, 3, 5, 7, 11, 23\}$ بنابر این رئوس گراف $\Delta(v_p)$ به این صورت خواهد بود:

طبق تعریف می‌دانیم رئوسی مجاور هستند که ضرب آن‌ها عددی از مجموعه V_p را عا د کند. ۲ و ۳ مجاورند چون ۶، اعداد ۱۸ و ۹۰ از مجموعه V_p را عا د می‌کند. ۵ و ۲ نیز مجاورند چون ۱۰، عدد ۹۰ از V_p را عا د می‌کند. پس تا اینجا گراف $\Delta(V_p)$ به صورت زیر است:

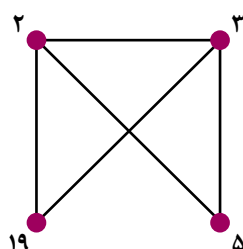


به همین ترتیب ادامه می‌دهیم ۲ و ۱۹ نیز مجاورند چون ضرب آن‌ها یعنی ۳۸، عدد ۳۸ از V_p را عا د می‌کند.

۳ و ۵ مجاورند چون ۱۵، عدد ۹۰ از V_p را عا د می‌کند. ۳ و ۱۹ مجاورند چون ۵۷ که ضرب ۳ و ۱۹ می‌باشد عدد ۵۷ از V_p را می‌شمارد.

۵ و ۱۹ مجاور نیستند چون ضرب آن‌ها یعنی ۹۵، عددی از مجموعه V_p را عا د نمی‌کند.

پس نهایتاً گراف $\Delta(V_p)$ به صورت زیر خواهد بود.



مدل‌سازی‌های متنوعی تاکنون تعریف شده است.



آیا شما می‌توانید یک مدل‌سازی گراف، روی مجموعه‌ها تعریف کنید؟

*** پی‌نوشت**

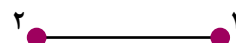
1. Common divisor graph
2. Ptime Vertex graph

اعداد	۲	۴	۶	۸
شمارنده‌های اول	۲	۲	۲ و ۳	۲

پس $\rho(V_p) = \{2, 3\}$ بنابراین رئوس گراف $\Delta(V_p)$ به صورت زیر خواهد بود.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید گراف $\Delta(V_p)$ فقط ۲ رأس دارد که این دو رأس با هم مجاورند چون ضرب ۲ و ۳ یعنی ۶، عدد ۶ از مجموعه V_p را عا د می‌کند. پس گراف $\Delta(V_p)$ به صورت زیر است.



مثال ۶

روی مجموعه $V_p = \{16, 18, 38, 57, 90\}$ گراف رأس اول را رسم کنید.

حل:

ابتدا شمارنده‌های اول اعضای V_p را پیدا می‌کنیم.

اعداد	۱۶	۱۸	۳۸	۵۷	۹۰
شمارنده‌های اول	۲	۲ و ۳	۲ و ۱۹	۳ و ۱۹	۲ و ۳ و ۵

پس $\rho(V_p) = \{2, 3, 5, 19\}$ بنابراین رئوس گراف $\Delta(V_p)$ به صورت زیر خواهند بود.



قسمت چهارم

داستان

اعداد



اشاره

با سلام خدمت شما یاران یارا!

بر عدد اعداد طبیعی خوشحالم که باز هم همدیگر را ملاقات کرده‌ایم و مشتاقانه به سراغ داستان شیرین اعداد می‌روم. اگر خاطر شریفتان باشد در شماره گذشته قرار گذاشتیم که امروز کمی از عرفان اسلامی در باب عدد با هم حرف بزنیم!

مخصوصاً در عرفان عددی تخصص داشته است. اخوان الصفا می‌پنداشتند که علم الاعداد راهی برای درک اصل وحدت موجود در شی و علمی فراتر از طبیعت و در عین حال ریشه همه علوم است.

از نظر آن‌ها نسبت خدا به جهان یا نسبت موجود بسیط به وجود معادل نسبت «۱» به اعداد است. آن‌ها (اخوان الصفا) موفق نشدند نظام دقیق و پیچیده‌ای مثل

در بصره فرقه‌ای به نام اخوان الصفا زندگی می‌کردند که طرفدار اسماعیلیان بودند و رساله‌های کاملی را در قرن دهم میلادی تولید کرده‌اند و ظاهراً در شمار نخستین افرادی بودند که به خوبی و کامل از اندیشه‌های نو افلاطونی و فیثاغورسی بهره بردند.

آنان بر این باور بودند که فیثاغورس حکیمی از حُرّان بوده و نیز عقیده داشتند پیامبری که به‌سوی صابیان حُرّان فرستاده شده، خنوخ یعنی هرمس مثلث العظمه بوده که به باور ایشان



قبلاً به وجود بیاورند و از اهمیت اعداد در کیهان و موسیقی کاملاً آگاه بودند.

در میان آنان ۷ «اعداد سیارات، نخستین عدد کامل چون حاصل $۳ + ۴$ ، $۵ + ۲$ و $۶ + ۱$ یعنی حاصل جمع اعداد وجوه مقابل تاس است.» و «۱۲» «عدد منطقه البروج، حاصل ۳×۴ یا $۵ + ۷$ است برای آن‌ها نقش واقعاً مهمی داشت.

«۹» را اعداد افلاک می‌نامیدند، این عدد اولین عدد فرد است که مربع کامل است.

«۲۸» در مکتب آنان کامل‌ترین عدد معادل منازل قمر است. در نتیجه مخصوصاً تعداد حروف الفبای عربی ۲۸ حرف است.

در شماره آینده به نمادگرایی عددی قرون وسطایی خواهیم پرداخت.

اکنون با هم برویم و به «۳» برسیم، عددی در برگیرنده و اثر همه است. عددی شامل «آغاز، میان و پایان» است. تداعی‌کننده انسان «بدن، جان و روح» است.

بیان چرخه حیات «تولد، زندگی و مرگ» می‌باشد. «گذشته و حال و آینده»

سه را که با چهار جمع کنی هفت می‌شود «عدد مقدس» چون سه را در چهار ضرب کنی دوازده می‌شود (دوجین کامل).

چینی‌ها «سه» را عدد کامل می‌دانند در آئین مسیحیان نماد کمال و وحدت الهی است «پدر، پسر، روح القدس»، «رهما، ویشنو، شیوا» در فرهنگ هند و «اهورا مزدا، مهر، آناهیتا» در ایران باستان در بابل «انلیل، راء، انو» در مصر «ایزیس، ازپریس، هوروس» و

دهها نمونه دیگر را می‌توان از سه یافت ایرانی‌ها در مقابل کار نیک شما «سپاس» می‌گویند.

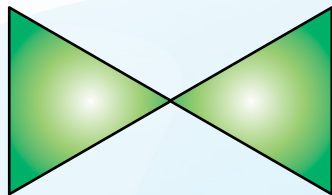
پاس اول، «رفتار نیک»

پاس دوم، «کردار نیک»

پاس سوم، «گفتار نیک»

«سه» در هندسه مربوط به مثلث است. محکم‌ترین شکل هندسی است. مثلث نماد طبیعت سه‌گانه است تثلیث را در مسیحیت به صورت سه‌گونه نشان می‌دهند.

مثلث با رأس رو به بالا نماد «زندگی، آتش، شعله و گرماست»، مثلث با رأس رو به پائین «نماد آب، سرما، دنیای مادی و بدن است». مثلث درون دایره، ناحیه «جلگه حقیقت» نام دارد شکل زیر مظهر کاهنده و افزاینده، بازگشت ابدی، مرگ و زندگی مردن و زنده شدن در روز رستاخیز است.



مثلث متساوی الاضلاع، بیانگر الوهیت، هماهنگی و تناسب است. مثلث متساوی الساقین، نماد یک‌پارچگی کیهان و تلاقی عناصر اربعه و تحولات چرخشی است.

مثلث قائم الزاویه، در فرهنگ مصری نشان‌دهنده ازپریس «آغاز»، ایزیس «وسط» و هوروس «پایان» است.

تا بعد ... «یا علی»



فلسفه ریاضی چیست؟

قسمت هفتم

استدلال استقرایی

اشاره: در قسمت قبل به برهان‌های تصویری و نقش آن‌ها در استدلال‌ها و اثبات‌های ریاضی پرداختیم در این قسمت سعی داریم به نوع دیگری از استدلال‌ها که به نوبه خود تأثیرات بسزایی در شکل‌گیری بسیاری از نظریه‌ها و گرایش‌های ریاضی داشته است بپردازیم. می‌توان آن را ریاضیات استقرایی نامید و بحث ما راجع به استقراء است و این که آیا اساساً استدلال‌های استقرایی را می‌توان ابزاری برای اثبات ریاضی در نظر گرفت و این که تا چه حد به آن‌ها می‌توان اتکاء کرد؟

مثال ۱ >

فرما رابطه $(2^n + 1)$ را برای یافتن و تولید اعداد اول (به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$) بیان کرد و البته او برای $n = 1$ و $\dots$ و $n = 4$ به اعداد اول ۵ و ۱۷ و ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ دست یافت و سپس برای هر $n \in \mathbb{N}$ ادعای خود را مطرح ساخت اما سال‌ها بعد اوایلر به‌ازای $n = 5$ به عدد $4294967297 = 2^{25} + 1$ رسید که به حاصل ضرب دو عدد اول تجزیه شد یعنی:

$$2^{25} + 1 = 641 \times 6700417$$

مثال ۲ >

گلدباخ نیز با یک روش استقرایی ادعا کرد که هر عدد زوج و بزرگتر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت:

$$4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 5 + 3,$$

$$10 = 5 + 5, 12 = 7 + 5, \dots$$

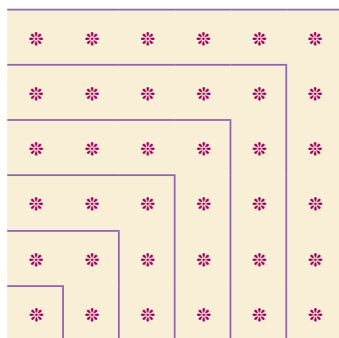
آن چه مسلم است این که یک استدلال ریاضی برای اثبات یک قضیه بسیار جامع‌تر و وسیع‌تر از اثبات آن قضیه است. یک برهان یا استدلال می‌تواند ایده‌های بسیار راهگشایی را مطرح کرده و روشی برای اثبات‌هایی دیگر به‌دست آورد.

استدلال استقرایی مبتنی بر شواهدی است که در چند مرحله به‌دست می‌آید و چالش اصلی اینجا شکل می‌گیرد که آیا می‌توان از این مشاهدات به یک نتیجه‌گیری کلی رسید و آیا این مقدمات برای رسیدن به آن نتیجه کلی می‌تواند نقش یک اثبات را ایفا کند؟ اگر به‌دنبال یک استقرا (نتیجه‌گیری کلی از مشاهدات جزئی) و رسیدن به یک حکم کلی، مثال نقضی ظاهر شود؛ مسلماً آن روش استقرایی به نتیجه درستی منتهی نشده است ولی اگر برای آن نتوانیم مثال نقضی پیدا کنیم، آیا آن حکم کلی یا فرمول به‌دست آمده اثبات شده است؟ به دو مثال زیر که در ریاضیات بسیار معروف هستند دقت کنید:

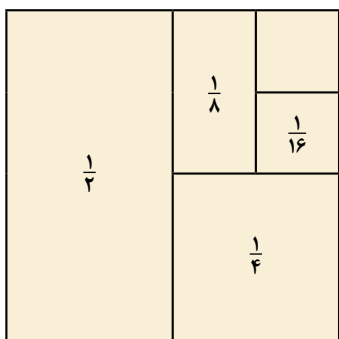
(اصول اولیه) از نتیجه‌ها، همان استقراء است بنابراین روش پذیرش و صدق در اصول اولیه ریاضیات در واقع روشی استقرایی است.
گودل در این زمینه تقریباً با راسل هم عقیده است و می‌گوید:
«اصول اولیه را باور داریم زیرا که نتایج آن‌ها درست هستند، نه به این دلیل که خود آن‌ها بدیهی‌اند»

در ادامه مطلب چند استدلال یا برهان تصویری که پایه و اساس آن‌ها را استقراء تشکیل می‌دهد (زیرا شکل‌ها محدود و از مشاهدات محدود فرمول‌ها را نتیجه می‌گیریم) و البته تا هر کجا که بخواهیم می‌توانیم شکل و نمودارها را ادامه دهیم.

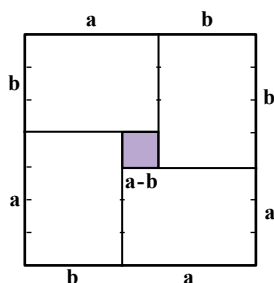
$$I) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$



$$II) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$



$$III) (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$



تاکنون هیچ مثال نقضی برای این ادعا یا این حکم کلی پیدا نشده است و به همین دلیل این حکم کلی را حدس گلدباخ می‌نامند. شاید این استدلال استقرایی متقاعد کننده باشد، اما یک برهان ریاضی محسوب نمی‌شود، ولی اگر روزی یک اثبات برای آن یافت شود این حدس به یک قضیه تبدیل می‌شود.

جناب فرما حدود ۳۷۰ سال قبل حدس دیگری را مطرح کرد و آن حدس این بود که معادله $X^n = Y^n + Z^n$ برای هر $n \geq 3$ جواب‌های صحیح و نابديهی ندارد. (نابديهی به معنی ناصفر یا $X \neq 0$ و $Y \neq 0$ و $Z \neq 0$).



حدود ۲۰ سال پیش اندرو وایلز در چند مرحله و با اثبات چند حدس مطرح شده از طرف ریاضی‌دانان دیگر (که سعی در اثبات حدس فرما داشتند) موفق شد این حدس را اثبات کند و پس از اثبات، این حدس به قضیه فرما تبدیل شد. (توجه دارید که معادله فوق به‌ازای $n = 2$ دارای بی‌شمار جواب است که همان اعداد فیثاغورسی هستند مانند $X = 5$ و $Y = 3$ و $Z = 4$ و هر مضرب این سه عدد مانند ۸، ۶، ۱۰، ۸.

شاید خوش‌بینانه‌ترین تحلیل از روش‌های استقرایی این باشد که ملاحظات و مشاهدات استقرایی و نتیجه‌گیری‌های کلی از آن‌ها در فعالیت‌های ریاضی و بخصوص ابداع قضیه‌ها نقش مهمی دارند اما استدلال یا برهان ریاضی فقط می‌تواند یک تحلیل واقعی و یک اثبات محسوب شود.

یک برهان دقیق ریاضی، مبتنی بر اصول اولیه یا اصل موضوعه‌ها است و البته این سؤال مطرح می‌شود که این اصول اولیه از کجا آمده‌اند و چرا ما آن‌ها را باور داریم آیا با استدلال‌های استقرایی به این اصول موضوعه‌ها یا اصول اولیه رسیده‌ایم؟

اگر چنین باشد که در واقع ما به نوعی استدلال‌های استقرایی را پذیرفته‌ایم!

در این‌جا نظر دو نفر از فلاسفه (راسل و گودل) درباره همین موضوع اصول اولیه یا اصول موضوعه را بیان می‌کنیم: راسل می‌گوید «ما عموماً اصول اولیه را باور داریم زیرا ملاحظه می‌کنیم که نتایج آن‌ها صادق‌اند، نه این‌که نتیجه‌ها را بپذیریم به این دلیل که اصول اولیه صادق‌اند» ولی استنتاج مقدمات

در باغ تجربه‌ها

پای صحبت استاد احمد بیرشک

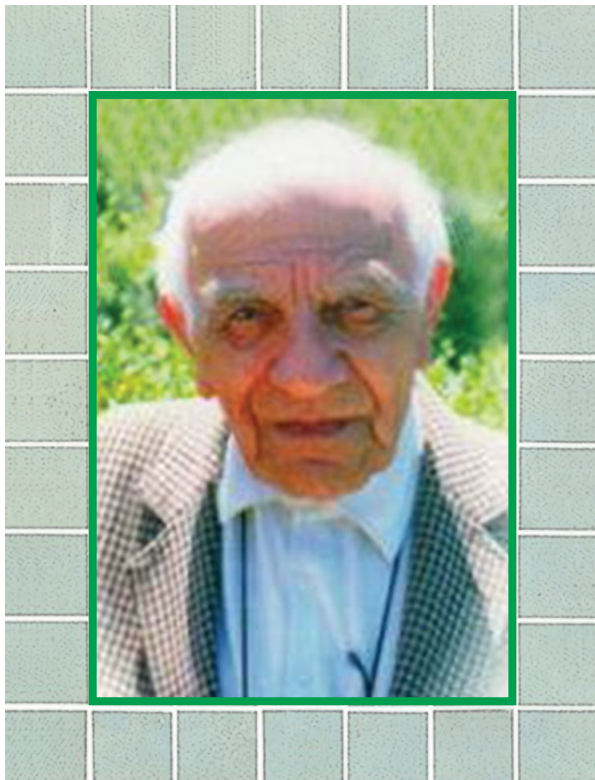
اشاره: این نوشته با استفاده از مصاحبه‌ای انجام شده که در سه برنامه در ۷۵/۹/۲۷ و ۷۵/۱۰/۴ و ۷۵/۱۰/۱۱ از برنامه در جهان ریاضی شبکه ۲ سراسری رادیو پخش شده است. مصاحبه کننده همکارمان آقای شادروان غلامرضا یاسی‌پور بوده‌اند. نشست داشتیم با استاد ارجمند جناب آقای بیرشک، استاد را همه می‌شناسیم و از تأثیرشان در ریاضیات ایران آگاهیم. سؤال‌هایی داشتیم درباره ریاضیات و کتاب‌های درسی و نقش ریاضیات از استاد که استاد با توجه خاص به آن‌ها پاسخ دادند. با تشکر از استاد ارجمند آن‌ها را با هم می‌خوانیم.

کامپیوتر به مبنای ۲ است. اگر این ریاضیات نبود ممکن نبود این همه علوم را به صورت ساده درآورد، البته وقتی با مبنای ۲ حساب می‌کنیم، مفصل‌تر است، اما چون جوابش دو عدد صفر است و ۱، دو عدد هستند، یکی از آن‌ها یعنی قطع، دیگری یعنی وصل، بنابراین چون با برق کار می‌کند، قطع و وصل می‌شوند. پس ریاضیات به مبنای ۲ اساس کار کامپیوتر است.

◆ اطلاع دارید که هزاره سوم را «هزاره ریاضیات» نامگذاری کرده‌اند. لطفاً در رابطه با ریاضیات در هزاره سوم برایمان صحبت کنید.

◆ استادبیرشک لطفاً نقش ریاضیات را در علوم پایه و کامپیوتر توضیح بدهید.

◆ ریاضیات در همه علوم تأثیر دارد. حتی در زیست‌شناسی و حقوق هم تأثیر دارد. علوم پایه بدون ریاضیات کاری نمی‌تواند انجام بدهند. اگر ریاضیات نبود دسترسی به فضا به این کیفیت میسر نمی‌شد و اگر ریاضیات نبود شیمی این قدر پیشرفت نمی‌کرد. ولی همین‌طور که خدمتان عرض کردم در علوم غیرعلمی هم مثل حقوق و زیست‌شناسی تأثیر شایانی دارد. کامپیوتر بر یک قسمتی از ریاضیات متکی است که به مبنای ۲ اجرا می‌شود ریاضیات معمولی به مبنای ده می‌باشد، ولی



به عقیده من مطلقاً قابل پیش‌بینی نیست. به دلیل این که سرعت علم روزافزون نیست، دم‌افزون است. یعنی هر دم ترقی بیشتری می‌کند. بنابراین کسی نمی‌تواند پیش‌بینی کند در سال ۲۰۰۰ به بعد چقدر در این مورد پیشرفت خواهد داشت. به‌همین جهت سال ۲۰۰۰ را اسمش را گذاشته‌اند سال جهانی ریاضی و در آن‌جا در تمام کشورهای جهان تا این سال درباره ریاضیات بحث می‌کنند. در ایران هم دانشگاه‌هایمان شروع کرده‌اند و تکیه داده به گروه‌هایی که کار انجام می‌دهند. اما برای این که در آینده چه خواهند کرد، آدم فکر می‌کند که رسیدیم به مقصد، اما تازه می‌بینیم یک چیز تازه‌تری هست. اگر بخواهیم در نظر بگیریم پیشرفت ریاضیات را در قرن نوزدهم و بیستم و بخواهیم حساب کنیم، باید بگوییم ریاضیات در قرن بیست و یکم دست‌کم چهار برابر قرن بیستم ترقی خواهد کرد.

❖ وضعیت آموزش ریاضی در ایران را چگونه می‌بینید و

پیشنهادهای جنابعالی در این مورد چیست؟

❖ آموزش ریاضی مدت‌ها به جد گرفته نشده بود و سال‌های متمادی بود که از تماس با علم روز محروم بودیم، ولی اخیراً شروع شد به انجام کارهایی و نوید خوبی می‌دهد به ما، مشروط به این که کمی جدی باشیم، ما در دانشگاه‌هایمان تا به حال درباره ریاضیات جدی نبودیم. شاید بتوانم عرض کنم درباره هیچ‌یک از علوممان به اندازه کافی جدی نبوده‌ایم، ولی فعلاً نهضتی شروع شده است و امیدواریم به جایی برسد.

❖ جناب استاد، به نظر جنابعالی کتاب‌های کمک درسی

می‌فیندند؟ و به‌طور کلی شرایط یک کتاب کمک درسی خوب

چه مواردی هستند؟

❖ آن وقتی که من درس می‌خواندم، تعداد موادی که تدریس می‌شد از حالا کمتر بود، ولی مقداری که در هر ماده تدریس می‌شد از حالا بیشتر بود، یعنی عمق مدارس متوسطه در قدیم خیلی بیشتر از حالا بود. حالا آن قدر هست که فقط باید مقدار مختصری گفت و گذشت، پس کتاب‌های درسی مطلقاً کافی نیست. کتاب کمک درسی آن چه را که در کلاس نمی‌توان آموخت، به آدم می‌آموزد، به‌نظر من کتاب‌های کمک درسی اگر خوب تهیه شوند، بهترین کاری خواهد بود برای دانش‌آموزان و حتی دانشجویان.

❖ جناب بیرشک در حال حاضر وضع مقالات ریاضی ایران

چگونه است؟

❖ خوب است! عرض کنم به حضورتان در حدی که انجام می‌شود کمتر از آن چه که در دانشگاه‌هاست نیست. نسبت‌اش خوب است و روز به روز هم بیشتر می‌شود. توجه به مقالات علمی خیلی زیاد شده است. الآن ما مجلاتی که کاملاً علمی هستند، یعنی صرفاً (علمی) هستند، متعدد داریم در نهایت توسط یک عده کوشش می‌شود که نقص‌ها جبران شوند. خوب است.

❖ جناب استاد بیرشک بفرمایید به نظر شما تفاوت ریاضیات

محض و کاربردی و نقش آن‌ها در ابعاد مختلف چگونه است؟

❖ توجه بفرمایید که خود متن سؤال می‌تواند مقدار قابل ملاحظه‌ای از اختلاف‌شان را توضیح دهد. ریاضیات کاربردی یعنی آن‌هایی که عملاً مورد استفاده هستند. طبعاً فایده‌هاشان برای جامعه زیادتر است، اما اثبات‌شان بر مقالات صرفاً ریاضی است. ما در مقالات صرفاً ریاضی مستقلاً کاری نکردیم و کاری نمی‌کنیم. الآن معدودی هستند از استادان ریاضی ما که مقالات صرفاً ریاضی مجلات خارجی را هم می‌خوانند.

♦ استاد به نظر شما فلسفه ریاضیات چیست؟ آیا فلسفه

ریاضی بخشی از ریاضیات است یا بخشی از فلسفه؟

♦ تعداد رشته‌های ریاضی در حال حاضر آن قدر زیادند که هیچ‌کس نمی‌تواند در همه رشته‌های ریاضی تخصص داشته باشد حتی در بعضی از رشته‌ها یک عمر لازم است که آدم تخصص پیدا کند. فلسفه ریاضی به معنی فلسفه نیست، بلکه روش‌هایی را که برای آسان کردن درک ریاضی و ثمربخش بودن آن است، مجموعاً فلسفه ریاضی را تشکیل می‌دهد. کتاب‌های فلسفه ریاضی مرتب روی روش‌های مختلف ریاضی بحث می‌کند.

♦ در این مرحله خوشحال می‌شویم از خاطرات خودتان برایمان بازگو کنید.

♦ من درباره خاطراتم نمی‌توانم زیاد صحبت کنم، به دلیل این که عمرم دراز بوده و سراسر خاطره است. انتخاب کردن و گلچین کردن هم مشکل است، دیگر این که خاطرات افراد خیلی به درد دیگران نمی‌خورد. بنابراین من فقط می‌توانم درباره یک خاطره ریاضی که به قول یکی از دوستان به داستان می‌ماند صحبت کنم؛ من تحصیلاتم بسیار نامرتب بوده، برای این که در خدمت پدر بودم. پدر عضو گمرک بود و مجبور بود در مرزها خدمت کند. آن وقت‌ها هم که من نوجوان بودم در مرزهایمان هیچ وسیله تحصیل نبود. در نتیجه مقدمات را پیش پدر آموختم و بعد هم خودم شروع کردم پیش خودم کار کردن، بنابراین خیلی جنبه خودآموخته دارم. چیزهایی که یاد گرفتم خودم یاد گرفتم. باری در دوره ابتدایی فقط شش ماه مدرسه رفتم، در دوره متوسطه شش سال را در دو سال طی کردم. یعنی سال‌های اول و دوم متوسطه را تابستان پیش خودم خواندم، پیش یک معلمی خواندم، سال سوم را در مدرسه خواندم سال چهارم را پیش خودم خواندم سال پنجم را در مدرسه خواندم سال ششم را پیش خودم خواندم تا دوره متوسطه تمام شد. خاطره‌ای که دارم درباره سال چهارم است. من سال سوم را که امتحان دادم کتاب‌ها را زدم زیر بغل و رفتم خدمت پدر، که تابستان را با هم باشیم، در آن جا تا توانستم تلاش کردم و یاد گرفتم. آمدم تهران که کلاس چهارم را امتحان بدهم و بروم کلاس پنجم. وقتی که آمدم شهریور گذشته بود و امتحانات تمام شده بود. هر مدرسه‌ای که رفتم برای امتحان تجدیدی گفتند امتحاناتمان تمام شده کاری نمی‌توانیم بکنیم. من هم نمی‌خواستم یک سال عمرم تلف بشود. بعد از این که از همه جا ناامید شدم به من خبر دادند که

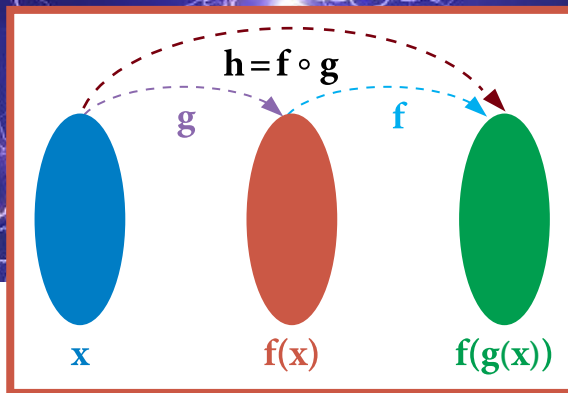
در خیابان امیریه، خیابان منیریه، مدرسه‌ای هست به نام «شرف مظفری» آخرین امید بود. رفتم به مدرسه، مدیر مدرسه مردی بود خیلی جدی و با هیبت و وسط اتاق ایستاده بود. سلامی کردم و گفتم ماجرا این است، می‌خواهم امتحان بدهم. گفت: «امتحاناتمان تمام شده نمی‌توانیم امتحان بگیریم، پسر برو.» اصرار کردم، به دلیل این که آخرین امید بود، گفت: «بهت می‌گویم نمی‌توانیم. پسر اسمت چیست؟» گفتم: «اسم احمد بیرشک است.» گفت: «احمد بیرشک تویی؟!» گفتم: «بله» گفت: «خوب برو به آن آقای ناظم که کنار استخر راه می‌روند بگو برایت یک فکری بکنند.» من با خوشحالی رفتم سراغ آقای ناظم سلام کردم. آقای ناظم همان کسی بود که بعدها در وزارت آموزش و پرورش به وزارت رسید. دکتر مهران، آن وقت اسمش صادقی بود، رفتم سلام کردم و مطلبم را گفتم. ایشان خیلی مؤدب، نه این که بگویند پسر برو، گفت: «خیلی معذرت می‌خواهم، خیلی دلم می‌خواست کاری انجام بدهم ولی امتحاناتمان تمام شده و کاری نمی‌توانیم بکنیم.» گفتم که آقای ناظم، آقای مدیر به من گفتند که بیایم خدمت شما برایم کاری انجام بدهید، نه این که بگویید نمی‌شود. گفت: «آقای مدیر فرمودند؟!» گفتم: «بله.» گفت: «خوب، اسم شما چیست؟» گفتم: «اسم بنده احمد بیرشک است.» گفت: «آقای احمد خان بیرشک جنابعالی هستی؟!» گفتم: «بله بنده هستم.» گفت: «خوب فردا صبح بیایید امتحان بدهید.»

روز بعد رفتم امتحان دادن و بالاخره رفتم کلاس پنجم. این مطلب برای من معما شده بود که آدمی که تهران را بلد نیست، دو تا آدم بزرگ مثل رئیس و ناظم یک مدرسه چه‌طور با اسمش آشنا هستند که اسمش مشکل‌گشا می‌شود؟! تحقیق کردم. بعد معلوم شد همان مدرسه که مدرسه «شرف» بود شاگردی داشت در کلاس سوم، هم‌کلاس من، می‌خواست امتحان بدهد، این‌ها دنبال این بودند که شاگرد اول ایران را بیرون بدهند، عبدالرسول دبیر شاگردشان بود، دنبالش بودند. امتحانات را داده بود بعد رفته بودند نتیجه را بگیرند دیده بودند عبدالرسول دبیر با معدل ۱۵/۸۷ شده شاگرد اول ایران، اما دو نفر معدل ۱۵/۸۷ دارند یکی عبدالرسول دبیر است و یکی به اسم احمد بیرشک، به خاطرشان مانده بود. پس وقتی من آمدم به ایشان گفتم اسم احمد بیرشک است دیدند این همان کسی است که با شاگرد اولشان هم نمره است.

♦ با تشکر از استاد احمد بیرشک.

توابع ترکیب

قسمت (۲)



به طریق مشابه برای تشکیل $g \circ f$:

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 1 \\ 2 &\xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 2 \\ 3 &\xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{g} \times \\ 5 &\xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 2 \end{aligned} \Rightarrow \text{gof} = \{(1, 1), (2, 2), (5, 2)\}$$

نتیجه:

$$f \circ g \neq \text{gof}$$

مثال ۲

را $f \circ g$ ضابطه و دامنه $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-4}$ به دست آورید:

حل:

$$D_g = [4, +\infty)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

مقدمه: در شماره قبل با مفهوم ترکیب توابع آشنا شدید.

با توجه به گستردگی مطالب، نتوانستیم همه را ارائه بدهیم و مثال‌های مربوط به این مبحث را در این شماره ملاحظه می‌کنیم

مثال ۱

$$g = \{(2, 1), (3, 2), (0, 2), (1, 4)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 0), (3, 8), (5, 3)\}$$

برای تشکیل $f \circ g$ به روش زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 2 &\xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 2 \\ 3 &\xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 0 \\ 0 &\xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 0 \\ 1 &\xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} \times \end{aligned} \Rightarrow f \circ g = \{(2, 2), (3, 0), (0, 0)\}$$

$$\sqrt{x-4} = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$D_{fog} = \{4, 13\}$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & \xrightarrow{g} & 0 \xrightarrow{f} 7 \\ 13 & \xrightarrow{g} & 3 \xrightarrow{f} 5 \end{array} \Rightarrow fog = \{(4, 7), (13, 5)\}$$

مثال ۴

$$g(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases} \text{ و } f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases} \text{ اگر باشد.}$$

(۱) $(fog)(1)$ را به دست آورید.

$$(fog)(1) = f(g(1)) = f(4) = 6$$

(۲) $(fog)(x)$ را به دست آورید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 3g(x)-1, & g(x) \leq 1 \\ g(x)+2, & g(x) > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} 3(x+3) & x+3 \leq 1, x \leq 2 \\ 3(2x-1) & 2x-1 \leq 1, x > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3+2 & x+3 > 1, x \leq 2 \\ 2x-1+2 & 2x-1 > 1, x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

در هر سطر اشتراک می گیریم

$$= \begin{cases} \begin{cases} 3x+9 & x \leq -2, x \leq 2 \\ 6x-3 & x \leq 1, x > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+5 & x > -2, x \leq 2 \\ 2x+1 & x > 1, x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} 3x+9, & x \leq -2 \\ 6x-3, & \emptyset \\ x+5, & -2 < x \leq 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} 3x+9, & x \leq -2 \\ x+5, & -2 < x \leq 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [4, +\infty) \mid \sqrt{x-4} \in \mathbb{R} - \{1\}\}$$

لازم است که $\sqrt{x-4} \in \mathbb{R} - \{1\}$ را حل کرده با $x \in [4, +\infty)$ اشتراک بگیریم.

$$\sqrt{x-4} \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \sqrt{x-4} \neq 1 \Rightarrow x \neq 5$$

$$D_{fog} = [4, +\infty) - \{5\}$$

اکنون ضابطه fog را به دست می آورید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-4}) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}-1}$$

مثال ۳

$$g(x) = \sqrt{x-4} \text{ و } f = \{(-1, 2), (3, 5), (0, 7)\}$$

باشد.

(۱) gof را به دست آورید.

حل:

f زوج مرتب است ترجیحاً از نمودار پیکانی استفاده می کنیم.

(۲) fog را به دست آورید.

$$-1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} \sqrt{-2} \times$$

$$3 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 1 \quad \checkmark \Rightarrow gof = \{(3, 1), (0, \sqrt{3})\}$$

$$0 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} \sqrt{3} \quad \checkmark$$

حل:

ابتدا باید به تابع g نگاه کنیم، D_{fog} را به دست آوریم.

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [4, +\infty) \mid \sqrt{x-4} \in \{-1, 3, 0\}\}$$

ابتدا $\sqrt{x-4} \in \{-1, 3, 0\}$ را حل کرده و بعد با $[4, +\infty)$

اشتراک می گیریم.

$$\sqrt{x-4} = -1 \text{ غ ق ق } 1$$

$$\sqrt{x-4} = 3 \Rightarrow x = 13$$

دو نمونه از مسأله ترکیب به صورت ماشین که در کنکور مورد توجه است:

مثال ۵

با توجه به ماشین $x \xrightarrow{f} 2x-1 \xrightarrow{g} 3x+1$ اگر $f(x) = 2x-1$ باشد حاصل $g(3)$ را به دست آورید.

حل:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3x + 1 \\ \Rightarrow g(2x - 1) = 3x + 1$$

حال $g(3)$ را می‌خواهیم، پس:

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow g(3) = 7$$

مثال ۶

در ماشین مقابل، ورودی کدام است؟



حل:

داریم:

$$g(f(x)) = \frac{4}{3} \\ \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3f(x) = 4\sqrt{f(x)} + 4$$

$$3f(x) - 4\sqrt{f(x)} - 4 = 0$$

$$\sqrt{f(x)} = t : 3t^2 - t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ ق ق}$$

$$t = -\frac{2}{3} \text{ غ ق ق}$$

$$\sqrt{f(x)} = 2 \Rightarrow f(x) = 4 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3$$

بعضی خواص در ترکیب توابع

(۱) ترکیب توابع، خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

(۲) ترکیب توابع، خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \quad (۳)$$

(۴) ترکیب هر تابع با وارونش، تابع همانی می‌شود.

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad x \in D_{f^{-1}} = R_f$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad x \in D_f$$

در رابطه با خاصیت ۴ به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۷

تابع f به معادله $f(x) = \sqrt{x-2}$ مفروض است.

(۱) $f^{-1}(x)$ را به دست آورید.

(۲) ضابطه $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید.

(۳) نمودار $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را رسم و مقایسه کنید.

حل:

$$۱) y = \sqrt{x-2} \quad D_f = [2, +\infty) \quad R_f = [0, +\infty)$$

$$y^2 = x - 2 \Rightarrow x = y^2 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$

$$۲) (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(x^2 + 2)$$

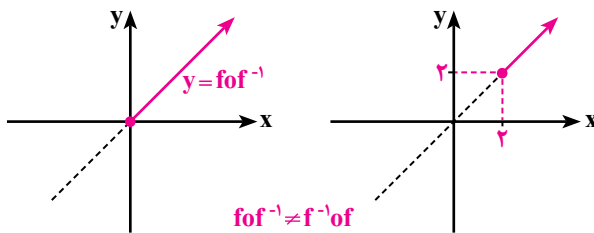
$$= \sqrt{x^2 + 2 - 2} = \sqrt{x^2} = |x| \quad \underline{\underline{x \geq 0}}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x-2})$$

$$= (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x$$

$$۳) D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = [2, +\infty)$$



عزیزان: با توجه به محدودیت‌ها نمی‌توان مثال‌های بیشتری را ارائه نمود و توصیه می‌شود برای درک بهتر این مطالب مسأله‌های بیشتری را حل کنید.

منبع

کتاب حسابان ۱ سال سوم دبیرستان

کاربردی از مشتق در هندسه

با توجه به جدول قبل به وضوح دیده می‌شود که محیط چندضلعی منتظم با مشتق مساحت نسبت به اندازه ضلع (a) برابر نیست یعنی: $S' \neq P$.

حال اگر مساحت و محیط n ضلعی منتظم را نه بر حسب (a) (اندازه ضلع)، بلکه بر حسب اندازه شعاع دایره محاطی (r) بنویسیم، جدول زیر را خواهیم داشت:

	محیط P	مساحت S	اندازه ضلع a
سه ضلعی منتظم	$6\sqrt{3}r$	$3\sqrt{3}r^2$	$2\sqrt{3}r$
چهارضلعی منتظم	$8r$	$4r^2$	$2r$
شش ضلعی منتظم	$4\sqrt{3}r$	$2\sqrt{3}r^2$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$
هشت ضلعی منتظم	$16(\sqrt{2}-1)r$	$8(\sqrt{2}-1)r^2$	$2(\sqrt{2}-1)r$
n ضلعی منتظم	$2nr \tan \frac{\pi}{n}$	$nr^2 \tan \frac{\pi}{n}$	$2r \tan \frac{\pi}{n}$

با توجه به جدول فوق به وضوح دیده می‌شود که محیط چندضلعی منتظم با مشتق مساحت نسبت به اندازه شعاع دایره محاطی (r) برابر است یعنی: $S' = P$.

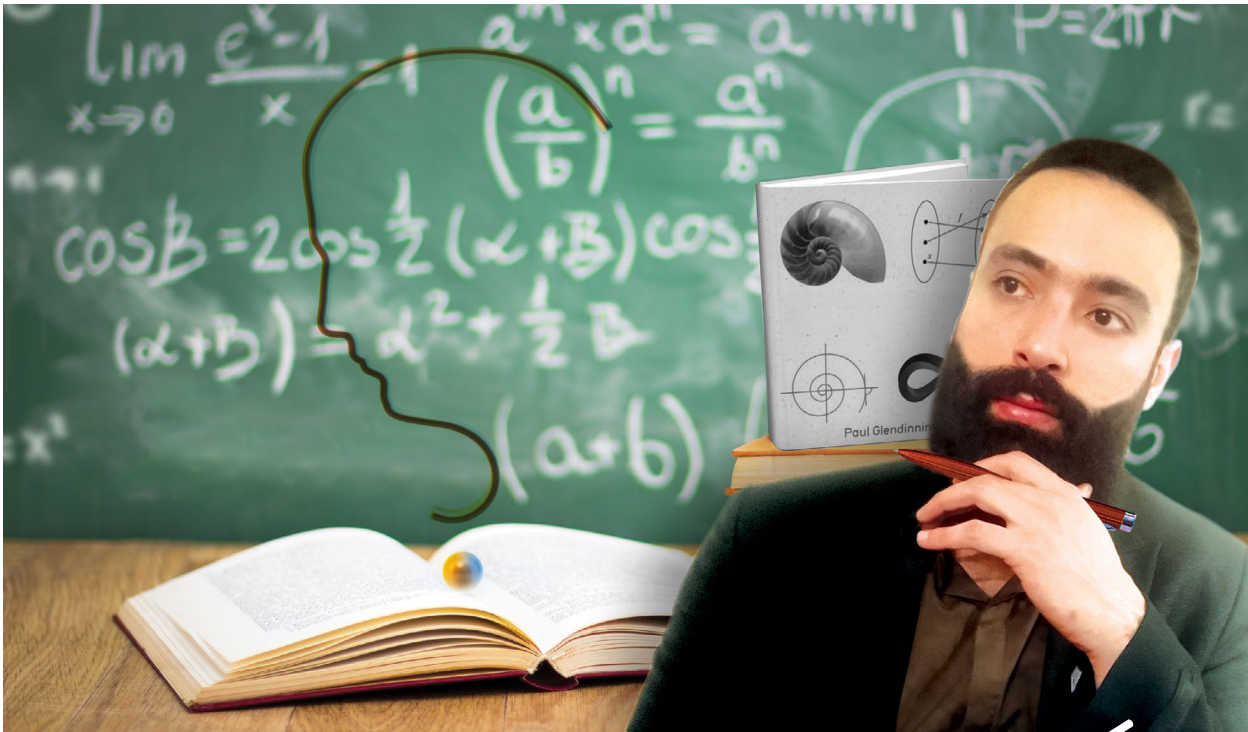
سؤال: آیا آنچه که در مورد کره دیدیم ($V' = S$) در مورد چند وجهی‌های منتظم به یال a نیز برقرار است.

مشتق $y = ax^n$ را نسبت به x ، به صورت $y' = anx^{n-1}$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم در دایره به شعاع r ، مساحت را با $S = \pi r^2$ و محیط را با $P = 2\pi r$ نشان می‌دهند. مشاهده می‌کنیم که محیط دایره برابر است با مشتق مساحت دایره نسبت به متغیر r یعنی: $S' = P$.

هم‌چنین می‌دانیم حجم کره به شعاع r را با $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ و مساحت را با $S = 4\pi r^2$ نشان می‌دهند. مشاهده می‌کنیم که مساحت کره برابر است با مشتق حجم کره نسبت به متغیر r یعنی: $V' = S$.

سؤال: آیا آنچه که در مورد دایره دیدیم ($S' = P$) در مورد چند ضلعی‌های منتظم به ضلع a نیز برقرار است؟

	محیط P	مساحت S	شعاع دایره محاطی r
سه ضلعی منتظم	$3a$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{6}a$
چهارضلعی منتظم	$4a$	a^2	$\frac{a}{2}$
شش ضلعی منتظم	$6a$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$
هشت ضلعی منتظم	$8a$	$2(\sqrt{2}+1)a^2$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}a$
n ضلعی منتظم	na	$na^2 \div (4 \tan \frac{\pi}{n})$	$a \div (2 \tan \frac{\pi}{n})$



تحلیل سؤالات هندسه ۱، ۲ و ۳ کنکور سراسری ۱۴۰۳

اشاره: یکی از پر استرس ترین درس های کنکور سراسری درس هندسه و گسسته است که همواره مورد بحث دانش آموزان چه در زمان خواندن، چه در هنگام پاسخ گوئی در امتحان کنکور، به منظور کم شدن این استرس در دفتر مجله تصمیم گرفتیم که سؤال های کنکور مرحله اول و دوم ۱۴۰۳ را با کتاب درسی مطابقت دهیم تا رهنمونی برای شما در کنکور پیش رو باشد. انشالله در این شماره و شماره های بعدی به این مهم خواهیم پرداخت.

در درس هندسه این کنکور برخلاف سال های قبل با تمرینات زمان بر کمتری مواجه بودیم. سؤالات هندسه این آزمون تقریباً مشابه کنکور سال ۱۴۰۱ بود و از ۱۴۰۲ ساده تر بود.

طراح یا طراحان محترم این آزمون توجه ویژه ای به متن کتاب درسی داشتند.

در صفحه ۱۹ کتاب درسی فعالیتی است که با مطالعه آن فعالیت به راحتی می توان این تست را پاسخ گفت که متن فعالیت در ذیل آمده است.

مثال

می دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله

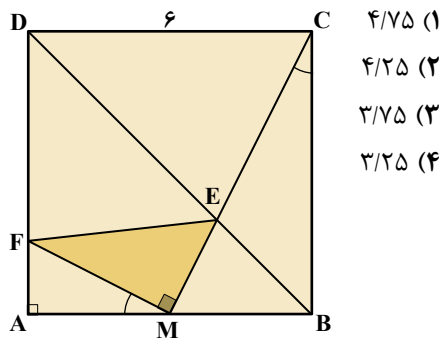
هندسه ۱ (تست های ۲۹-۲۶)

۲۶. فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

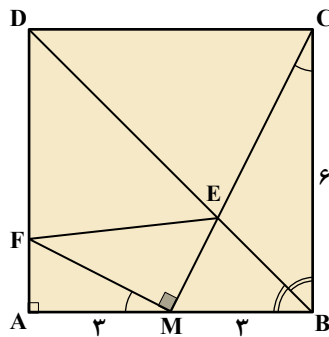
- (۱) تلاقی سه ارتفاع
- (۲) تلاقی سه میانه
- (۳) تلاقی سه نیمساز
- (۴) تلاقی سه عمود منصف

البته نباید انتظار داشته باشید که عین متن کتاب برای شما در هندسه (مخصوصاً سؤال کنکور باشد همین که مشابه آن را در کتاب دیده باشید باید ایده بگیرید و تمرین را حل کنید.

۲۸. در مربع شکل زیر، نقطه M وسط ضلع AB و $\widehat{AMF} = \widehat{BCE}$ است. مساحت مثلث سایه خورده کدام است؟



این تست از تست‌های جدید در کنکور بود که مشابه آن را در کنکورهای قبلی و کتاب نداشته‌ایم.



دو مثلث AMF و MBC به حالت دو زاویه متشابه‌اند.

$$\text{بنابراین: } \frac{AF}{3} = \frac{3}{6} \Rightarrow AF = \frac{3}{2}$$

مثلث AMF قائم‌الزاویه است و MF وتر است بنابراین:

$$MF = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

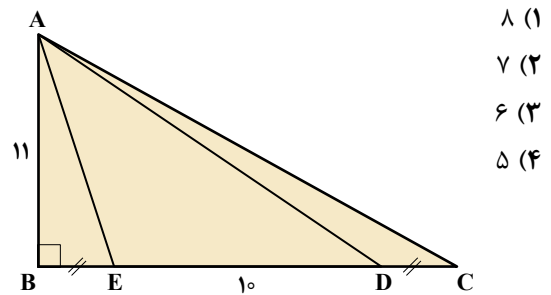
در مثلث قائم‌الزاویه BMC ، BE نیمساز است (قطر مربع). پس:

$$\frac{ME}{EC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow EC = 2ME \Rightarrow MC = 3ME$$

$$S_{MFE} = \frac{1}{2} MF \times ME = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.
و لذا گزینه «۳» پاسخ تست است.

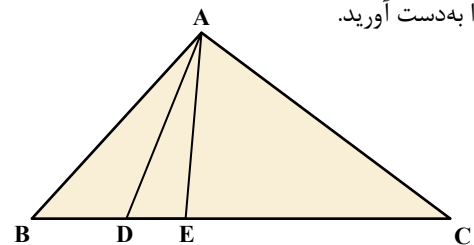
۲۷. در شکل زیر، $\widehat{DAE} = \widehat{ACD}$ و $BE = DC$ است. اندازه DC کدام می‌تواند باشد؟



در صفحه ۳۳ کتاب درسی تمرینی داریم که حل آن کمک زیادی به حل این تست می‌کند.

در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث

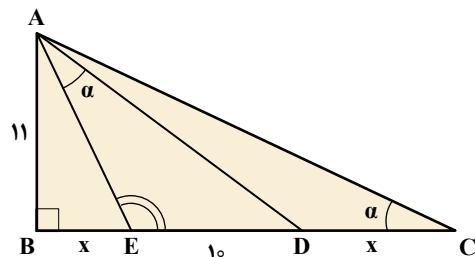
ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



فرض کنید $BE = CD = X$

مثلث ABE قائم‌الزاویه است. پس: $AE = \sqrt{x^2 + 121}$

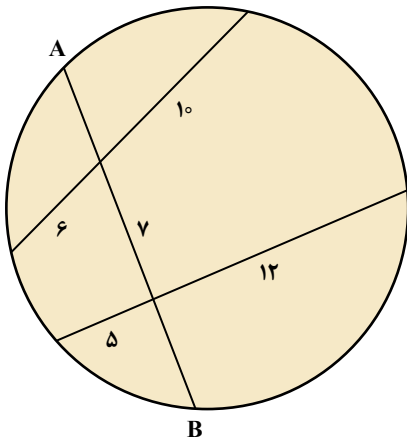
دو مثلث ACE و ADE به حالت دو زاویه متشابه‌اند. پس:



$$\frac{\sqrt{x^2 + 121}}{10} = \frac{x + 10}{\sqrt{x^2 + 121}} \Rightarrow x = 7$$

هندسه ۲ (تست‌های ۳۰-۳۲)

۳۰. در شکل زیر، طول وتر AB کدام است؟



- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

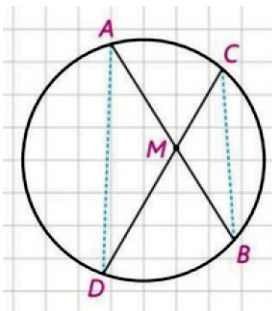
مشابه فعالیت صفحه ۱۸ کتاب درسی

فعالیت

۱- دو وتر AB و CD در نقطه M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.
(الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MBC و MAD متشابه‌اند.

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \quad \text{با توجه به تشابه این دو مثلث داریم:}$$

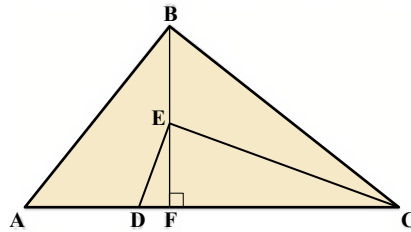
۱ و در نتیجه: $AM \cdot \dots = CM \cdot \dots$



۱. دو وتر AB و CD در نقطه M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

(الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید

۳۹. در شکل زیر، $\hat{ABC} = \hat{CED} = 90^\circ$ است. اگر $AD = 3$ ، $EF = 4$ و $DF = 1$ باشد، اندازه BC کدام است؟



- (۱) $4\sqrt{6}$
(۲) $10\sqrt{2}$
(۳) $6\sqrt{3}$
(۴) $8\sqrt{5}$

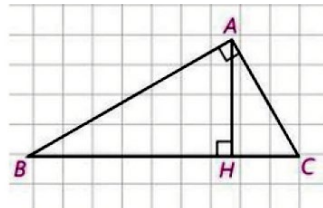
این تمرین مربوط به صفحه ۴۱ کتاب درسی و همچنین کمک گرفتن از رابطه‌های طولی مثلث قائم‌الزاویه که هم در این کتاب و هم در کتاب هندسه ۲ آمده است قابل حل است که البته تمرین آشنایی است و به راحتی می‌توان حل کرد.

اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم‌الزاویه

فعالیت

۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید دو زاویه هم‌اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟ $\hat{H} = \dots = 90^\circ$ و $\hat{B} = \dots$ به همین ترتیب دو زاویه هم‌اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید. بنابراین می‌توانیم بگوییم:

$$\triangle ABH \sim \triangle ABC, \quad \triangle ACH \sim \triangle ABC$$



در مثلث DEC ، ارتفاع وارد بر وتر است. پس:

$$EF^2 = DF \times FC \Rightarrow 16 = 1 \times FC \Rightarrow FC = 16$$

در مثلث ABC ، ارتفاع وارد بر وتر است. پس:

$$BF^2 = 4 \times 16 \Rightarrow BF = 8$$

در مثلث قائم‌الزاویه BFC رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$BC^2 = BF^2 + FC^2 = 8^2 + 16^2 \Rightarrow BC = 8\sqrt{5}$$

توجه داریم که در هندسه ۱، در این آزمون از فصول ۳ و ۴ سوالاتی مطرح نشده

دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.

(ب) با توجه به تشابه این دو مثلث داریم:

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{.....}$$

و در نتیجه: $AM. = CM.$

بناباه روابط طولی داریم:

$$\begin{cases} x(y+y) = 60 \\ y(y+x) = 60 \end{cases} \Rightarrow yx + xy = y^2 + xy \Rightarrow x = y$$

$$x(y+x) = 60 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow AB = 17$$

۳۱. در کدام تبدیل، همواره جهت شکل حفظ می‌شود؟

(۱) بازتاب (۲) دوران

(۳) انتقال (۴) تجانس

ابتدا متذکر می‌شوم که در صفحه ۵۰ کتاب درسی می‌توان چنین تمریناتی را پیدا کنیم و بعد از آن به نظر بنده این سؤال دارای ایراد است برای حل آن در دیدگاه زیر را در نظر می‌گیریم و مسأله را حل می‌کنیم.

۱. اگر ایراد تایپی باشد.

اگر منظور طراح محترم این بوده که در کدام تبدیل «همواره جهت شکل حفظ نمی‌شود» گزینه «۱» درست است که خود کلمه همواره ابهام ایجاد کرده است.

۲. اگر ایراد تایپی نباشد.

اگر برداشت طراح از جهت چیزی مثل جهت بردار بوده باشد، انتقال پاسخ مسأله خواهد بود و لذا گزینه «۳» درست است. از دیدگاه بنده گزینه ۳ محتمل‌تر است می‌توان ایراد تایپی را مدنظر قرار نداد.

کاردکلاس

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

طول پاره خط را حفظ می‌کند	اندازه زاویه را حفظ می‌کند	شیب خط را حفظ می‌کند	جهت شکل را حفظ می‌کند	مساحت شکل را حفظ می‌کند
بازتاب				
انتقال				
دوران				
تجانس				

۳۲. در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازه قاعده ۱۶ و اندازه

میانه وارد بر آن، نصف قاعده است. اندازه میانه نظیر

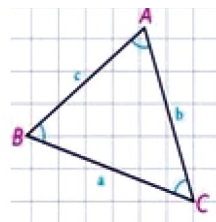
هر ساق کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) \frac{11}{2}\sqrt{5} & (۲) \frac{7}{2}\sqrt{10} \\ (۳) 6\sqrt{5} & (۴) 4\sqrt{10} \end{array}$$

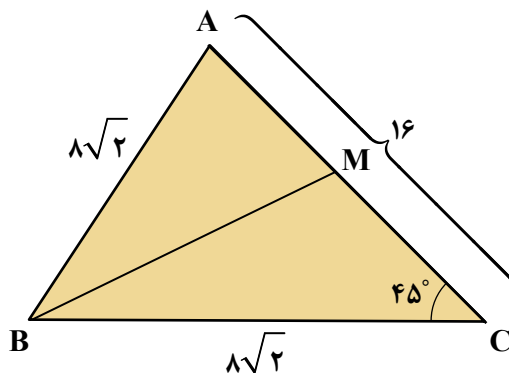
قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = \dots + \dots - \dots$$

$$c^2 = \dots + \dots - \dots$$



کافی است که قضیه کسینوس‌ها صفحه ۶۷ کتاب درسی را مطالعه کرده باشید حل این تست راحت خواهد بود.



$$AB = AC = 8\sqrt{2}, C = 45$$

$$\text{قانون کسینوس‌ها: } BM^2 = 16^2 + (8\sqrt{2})^2 - 2 \times 16 \times 8\sqrt{2}$$

$$\times 16 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BM = 4\sqrt{10}$$

هندسه ۳ (تست‌های ۳۶-۳۳)

۳۳. اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتب ۲ و $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی

ماتریس $A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} B - \frac{3}{2} A$ کدام است؟
 (۱) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 9 & 3 & 9 \\ 4 & -9 & -9 \end{pmatrix}$

در درس ۱، هندسه ۳ چندین تمرین مشابه تست آمده است که یکی از آشناترین تست‌ها برای هر دانش‌آموز خواهد بود. فقط کافی است درس خوانده باشید.

$$A \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = A \times (-3I) \times B = -3AB$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{12} \times a_{21} = 9$$

۳۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ بشود، سطر سوم ماتریس

A^T کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} -10 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & -5 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} -10 & 1 & 7 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 7 & 5 & -5 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} -10 & 1 & 7 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

تعریف توان در تمرین ۵ صفحه ۲۰ کتاب درسی آمده است یعنی با حل و فراگرفتن آن تمرین حتماً این مسأله را حل خواهید کرد.

۵. اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به صورت $A^T = AA$ و $A^2 = AA^T$ و ...

و $A^n = AA^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$ ، $n > 1$) در این صورت با فرض

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \times \text{سطر سوم } A^T = \text{سطر سوم}$$

$$A^T = A^T \times A \Rightarrow A^T$$

$$\text{سطر سوم } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{سطر سوم } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

۳۵. کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = 3$ و $x = -3$

روی محور x ها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{2}$ باشد، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

$$(1) 15\sqrt{2} \quad (2) 12\sqrt{2} \quad (3) 8\sqrt{2} \quad (4) 6\sqrt{2}$$

خروج از مرکز بیضی در صفحه ۴۸ کتاب درسی تعریف شده و فرمولش هم آمده است.

فعالیت ۳

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای a و c بیضی موردنظر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $0 \leq c \leq a$ و لذا $0 \leq \frac{c}{a} \leq 1$ دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به صورت تقریبی ابتدا دو کانون F و F' را به فاصله $2c$ از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به گونه‌ای انتخاب کنید که فاصله A تا F و فاصله A' تا F' برابر $a-c$ و اندازه AA' برابر $2a$ باشد، سپس با استفاده از رابطه $b^2 = a^2 - c^2$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را به طور تقریبی رسم کنید:

اگر $F(3, 0)$ و $F'(-3, 0)$ کانون‌های بیضی باشند.

$$2c = FF' \Rightarrow 2c = \sqrt{(0-0)^2 + (-4-2)^2}$$

$$\Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 9 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$= 81 - 9 = 72$$

$$b = 6\sqrt{2} \Rightarrow 2b = 12\sqrt{2}$$

$$S = |b \times c| = |(1, 10, -4)| = \sqrt{180}$$

$$v = |a \cdot (b \times c)| = (2, -3, 4) \cdot (1, 10, -4)$$

$$= 16 - 30 - 16 = -30$$

$$h = \frac{v}{S} = \frac{-30}{\sqrt{180}} = -\sqrt{5}$$

تفریح اندیشه

مهرداد و آرش برای خوردن شام به رستوران رفته بودند و برای مهرداد ۵ ظرف و برای دوستش ۳ ظرف غذا آوردند. در همین موقع دوستشان، علی، سر رسید و آن‌ها غذایشان را با او تقسیم کردند. علی پس از صرف غذا، سهم خود را که ۱۶ تومان بود پرداخت. در صورتی که بهای تمام غذاهای سفارش داده شده برابر باشد، مهرداد و آرش هر کدام چه مبلغی از این ۱۶ تومان را دریافت کرده‌اند؟

پاسخ: مهرداد و آرش ۱۶ تومان را با هم تقسیم کردند. چون علی سهم خود را ۱۶ تومان پرداخت کرد، پس سهم هر یک از آن‌ها ۸ تومان است. اما چون آن‌ها ۵ ظرف و ۳ ظرف غذا آوردند، پس سهم هر ظرف ۲ تومان است. بنابراین مهرداد ۱۰ تومان و آرش ۶ تومان دریافت کرده‌اند.

۳۶. یک متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{a} = (2, -3, 4)$

و $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ و $\vec{c} = (3, -2, 1)$ تولید شده و صفحه

P شامل بردارهای b و c است. اندازه ارتفاع این

متوازی‌السطوح عمود بر صفحه P، کدام است؟

$$(1) \sqrt{5} \quad (2) 5\sqrt{2}$$

$$(3) \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (4) \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

اگر صفحه ۸۳ کتاب درسی را مطالعه کرده باشید حتماً بر حل این تست ظفر خواهید یافت این هم شاهد مدعا (کنکور ۱۳۹۴ تست شماره ۵۴).

حجم متوازی‌السطوح

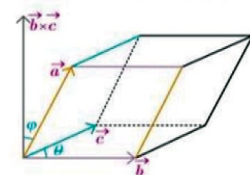
اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می‌توان به کمک آنها متوازی‌السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.

همان‌طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی‌السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec{b} \times \vec{c}|$. با استفاده از دترمینان نیز می‌توان مساحت متوازی‌الاضلاع بدید آمده توسط دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



۵۴. بر روی سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$

یک متوازی‌السطوح ساخته شده است.

اگر قاعده این متوازی‌السطوح را بردارهای a و b تشکیل

دهند، ارتفاع متوازی‌السطوح کدام است؟

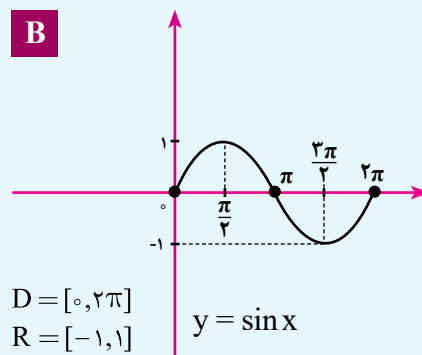
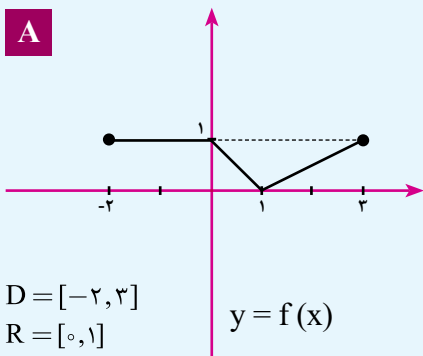
$$(1) 1 \quad (2) 1/5$$

$$(3) \sqrt{3} \quad (4) 2$$

تبدیلات وانتقال توابع

مقدمه: سلام به شما دانش آموزان خوبم

این مقاله در مورد یکی از مباحث مهم کتاب درسی، انتقال توابع است برای ارائه و یادگیری بهتر شما دو منحنی در ذیل به نام‌های A و B آمده است که تمام مثال‌ها برای دو منحنی اعمال شده است.

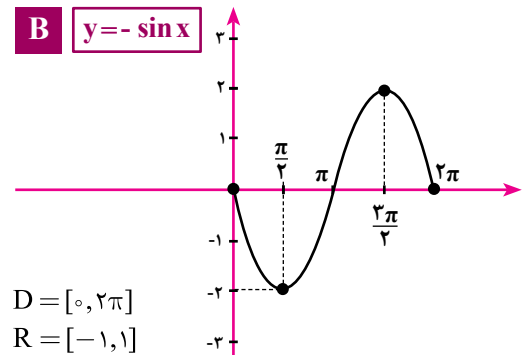
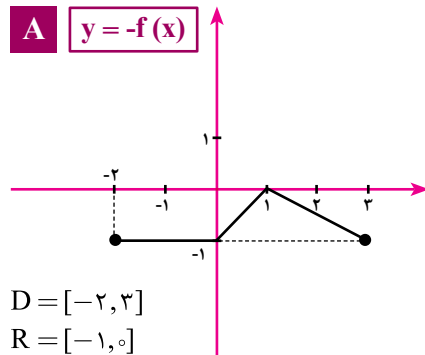


* دامنه تابع به معادله $y = \sin x$ برابر $\mathbb{R}$ است ولی ما نمودار تابع را در یک دوره تناوب آن یعنی $[0, 2\pi]$ در نظر گرفته‌ایم.

(۱) رسم نمودار تابع به معادله $y = -f(x)$ (انعکاس به محور xها)

اگر نقطه $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ از منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد. آن گاه نقطه $A' \begin{vmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{vmatrix}$ از منحنی تابع به معادله $y = -f(x)$ است و به عکس.

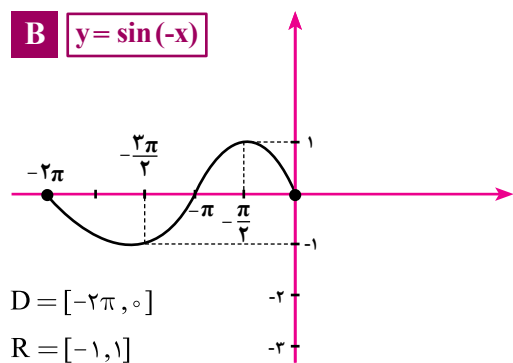
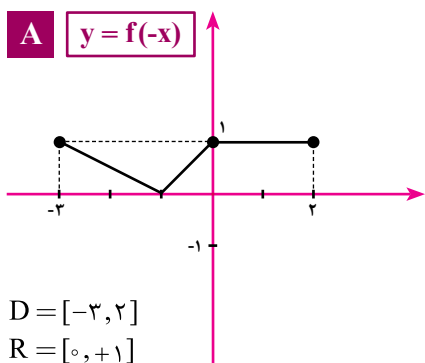
نتیجه: برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ باید قرینه نمودار تابع به معادله $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم. به شکل های زیر توجه کنید:



۲ رسم نمودار تابع به معادله $y = f(-x)$ (انعکاس به محور y ها)

* اگر نقطه $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ از منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه $A' \begin{vmatrix} -x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ نقطه ای از منحنی تابع به معادله $y = -f(x)$ است.

نتیجه: برای رسم نمودار تابع به معادله $y = f(-x)$ باید قرینه نمودار تابع به معادله $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم. به شکل های زیر توجه کنید:



در انعکاس توابع (شماره ۱ و ۲) داریم:

تابع	دامنه	برد
$y = f(x)$	$[a, b]$	$[c, d]$
$y = -f(x)$	$[a, b]$	$[-d, -c]$
$y = f(-x)$	$[-b, -a]$	$[c, d]$

* در $f(-x)$ برد تغییر نمی کند

* در $-f(x)$ دامنه تغییر نمی کند.

* در هر دو حالت انقباض و انقباض نمودار تابع تغییر نمی کند. * در موارد فوق دامنه و برد می تواند بازه های باز یا نیم باز باشند.

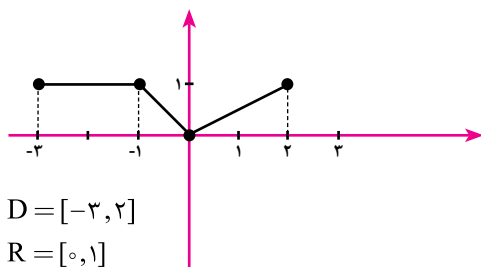
۳ رسم نمودار تابع به معادله $y = f(x+k)$ (انتقال افقی)

اگر نقطه $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ از منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد. آن گاه نقطه $A' \begin{vmatrix} x_0 - k \\ y_0 \end{vmatrix}$ نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y = f(x-k)$ است.

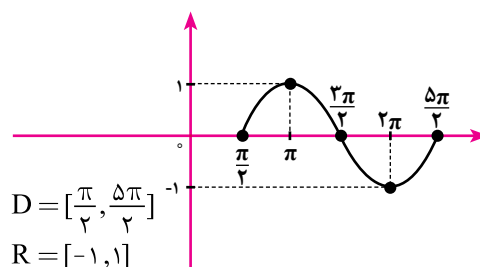
نتیجه: برای رسم نمودار تابع به معادله $f(x+k)$ باید نمودار تابع به معادله $y = f(x)$ را k واحد در راستای محور x تغییر مکان دهیم. اگر $k > 0$ آن گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه k به سمت چپ محور x منتقل می‌شود اگر $k < 0$ آن گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه k به سمت راست محور x منتقل می‌شود.

به شکل‌های زیر توجه کنید:

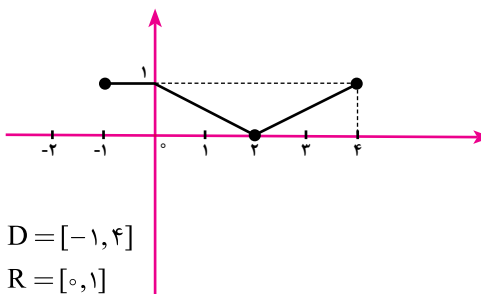
A $y = f(x-1) \rightarrow$ نمودار f یک واحد به راست منتقل می‌شود.



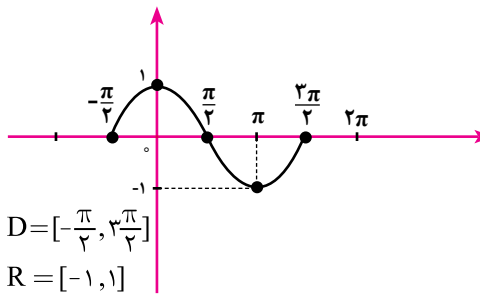
B $y = \sin(x - \frac{\pi}{3}) \rightarrow$ نمودار تابع $\frac{\pi}{3}$ به راست منتقل می‌شود.



A $y = f(x+1) \rightarrow$ نمودار f یک واحد به چپ منتقل می‌شود.



B $y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \rightarrow$ نمودار تابع $\frac{\pi}{3}$ به چپ منتقل می‌شود.



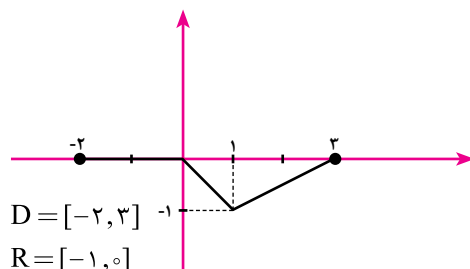
۴ رسم نمودار تابع به معادله $y = f(x) + k$ (انتقال عمودی)

اگر نقطه $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ از منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد. آن گاه نقطه $A' \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 + k \end{vmatrix}$ نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y = f(x) + k$ است.

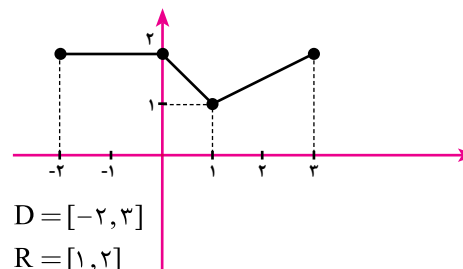
نتیجه: برای رسم نمودار تابع به معادله $y = f(x) + k$ باید نمودار تابع به معادله $y = f(x)$ را k واحد در راستای محور y انتقال دهیم. اگر $k > 0$ آن گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه k به طرف بالای محور y می‌رود اگر $k < 0$ آن گاه هر نقطه تابع f به اندازه k به طرف پایین محور y می‌رود.

به شکل های زیر توجه کنید:

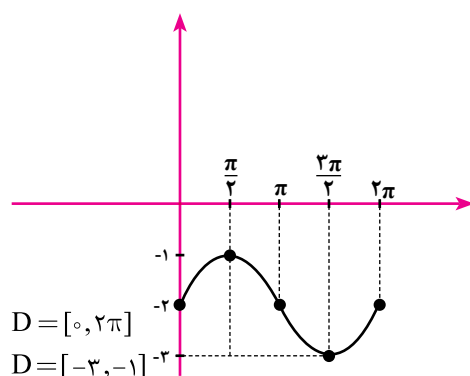
A $y = f(x) - 1 \rightarrow$ نمودار f یک واحد به پایین منتقل می شود.



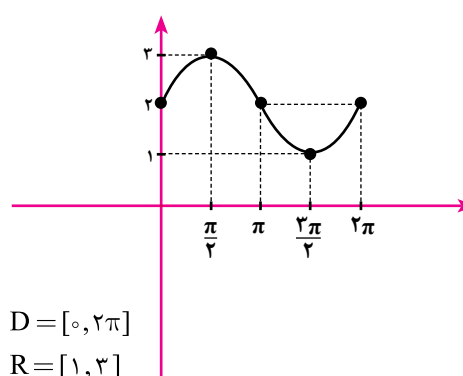
A $y = f(x) + 1 \rightarrow$ نمودار f یک واحد به بالا منتقل می شود.



B $y = \sin x - 2 \rightarrow$ نمودار تابع $\sin$ یک واحد به پایین منتقل می شود.



B $y = \sin x + 2 \rightarrow$ نمودار تابع $\sin$ یک واحد به بالا منتقل می شود.



در انتقال افقی و عمودی (شماره ۳ و ۴) داریم:

تابع	دامنه	برد
$y = f(x)$	$[a, b]$	$[c, d]$
$f(x + k)$	$[a - k, a + k]$	$[c, d]$
$f(x) + k$	$[a, b]$	$[c + k, d + k]$

* در انتقال افقی برد تغییر نمی کند. * در انتقال عمودی دامنه تغییر نمی کند.

* در انتقال افقی و عمودی، انبساط و انقباض تابع تغییر نمی کند. * در موارد فوق دامنه و برد می تواند، بازه های باز یا نیم باز باشند.

تمرین

با توجه به نمودارهای A و B، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

A: $y = f(x - 3) + 1$, $y = f(x + 2) - 1$

B: $y = \sin(x - \frac{\pi}{4}) - 2$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + 2$

تذکر: می توان موارد گفته شده را با هم در یک مسأله مطرح کرد به طور مثال $y = f(x + k) + k'$ که k انتقال افقی و k' انتقال عمودی است.

۵ رسم نمودار تابع به معادله $y = kf(x)$

اگر نقطه $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ از منحنی تابع به معادله $y = kf(x)$ باشد. آن گاه نقطه $A' \begin{vmatrix} x_0 \\ ky_0 \end{vmatrix}$ بر منحنی تابع به معادله $y = kf(x)$ است.

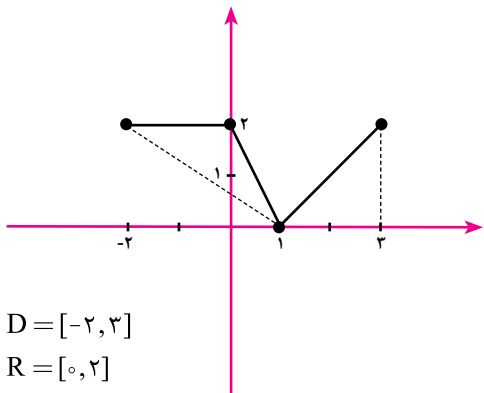
نتیجه: برای رسم نمودار تابع به معادله $y = kf(x)$ باید عرض هر نقطه از منحنی تابع f را در k ضرب کنیم.

* اگر $k > 1$ ، نمودار f در امتداد محور y ها با خرید، k کشیده می شود (انبساط عمودی)

* اگر $0 < k < 1$ ، نمودار f در امتداد محور y ها با خرید، k کشیده می شود (انقباض عمودی)

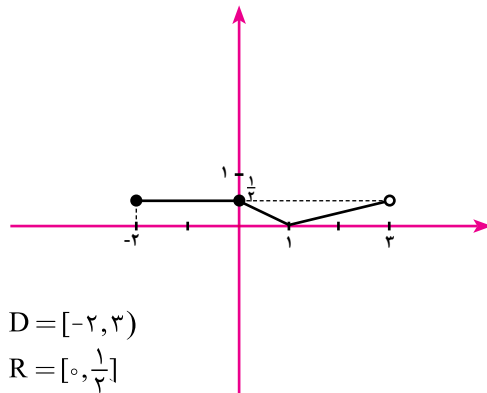
به شکل های زیر توجه کنید.

A $y = 2f(x) \rightarrow$ عرض نقاط منحنی در ۲ ضرب می شود.



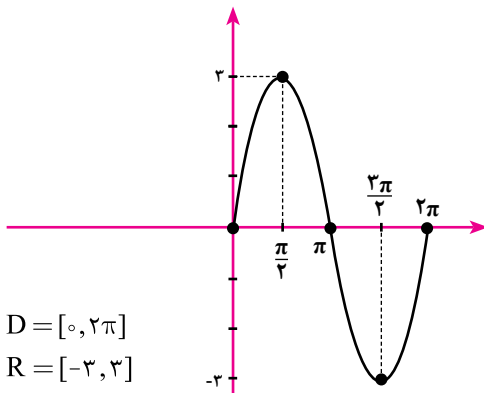
انبساط عمودی دارد.

A $y = \frac{1}{2}f(x) \rightarrow$ عرض نقاط منحنی در $\frac{1}{2}$ ضرب می شود.



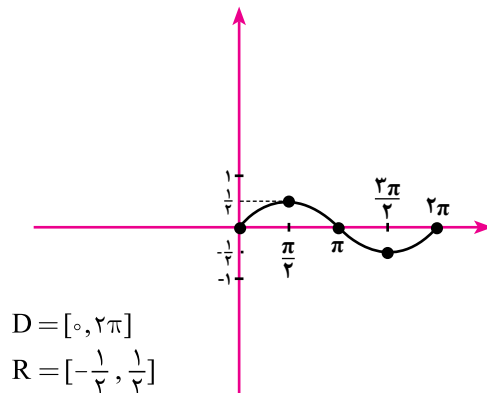
انقباض عمودی دارد.

B $y = 3\sin x \rightarrow$ عرض نقاط منحنی در ۳ ضرب می شود.



انبساط عمودی دارد.

B $y = \frac{1}{3}\sin x \rightarrow$ عرض نقاط منحنی در $\frac{1}{3}$ ضرب می شود.



انقباض عمودی دارد.

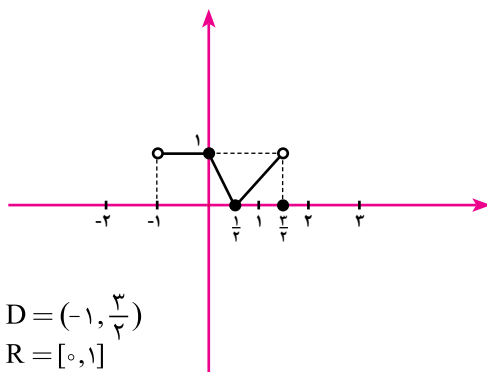
۶ رسم نمودار تابع به معادله $y = f(kx)$

اگر نقطه $A \left(\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right)$ بر منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد. آن گاه نقطه $A' \left(\begin{matrix} \frac{x_0}{k} \\ y_0 \end{matrix} \right)$ بر منحنی تابع به معادله $y = f(kx)$ است.

نتیجه: برای رسم نمودار تابع به معادله $y = f(kx)$ باید طول هر نقطه از منحنی تابع f را $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.
 * اگر $k > 1$ ، نمودار f در امتداد محور x با ضریب $\frac{1}{k}$ جمع می شود (انقباض افقی)
 * اگر $0 < k < 1$ ، نمودار f در امتداد محور x با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می شود (انبساط افقی)

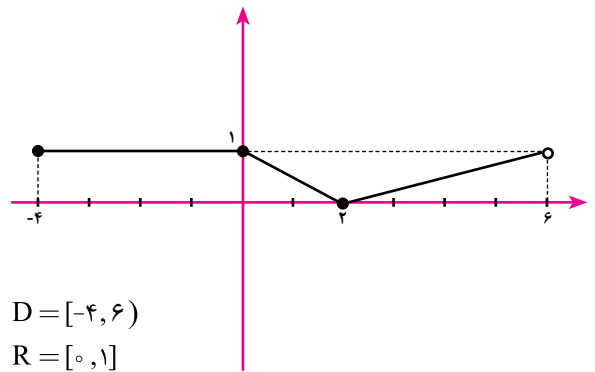
به شکل های زیر توجه کنید:

A $y = f(2x) \rightarrow$ طول نقاط منحنی در $\frac{1}{2}$ ضرب می شود.



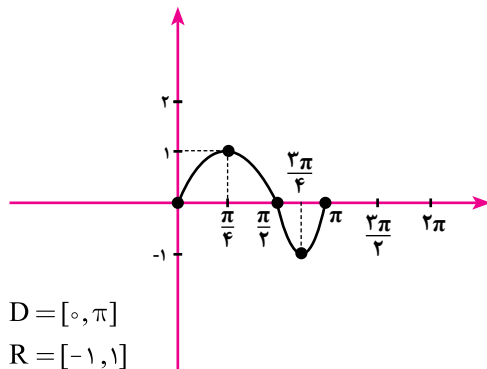
انبساط افقی دارد.

A $f(\frac{x}{2}) \rightarrow$ طول نقاط منحنی در ۲ ضرب می شود.



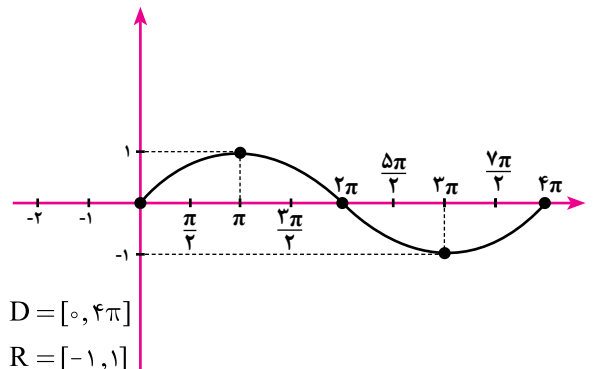
انبساط افقی دارد.

B $y = \sin 2x \rightarrow$ طول نقاط منحنی در $\frac{1}{2}$ ضرب می شود.



انقباض افقی دارد.

B $y = \sin(\frac{1}{2}x) \rightarrow$ طول نقاط منحنی در ۲ ضرب می شود.



انبساط افقی دارد.

در نمودارهای با انبساط و انقباض (شماره ۵ و ۶) داریم:

تابع	دامنه	برد	$k > 1$	$0 < k < 1$
$f(x)$	$[a, b]$	$[c, d]$		
$kf(x)$	$[a, b]$	$[kc, kd]$	انبساط عمودی	انقباض عمودی
$f(kx)$	$[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$	$[c, d]$	انقباض افقی	انبساط افقی

* در $f(kx)$ دامنه تغییر نمی کند.

* در $f(kx)$ برد تغییر نمی کند.

* در موارد فوق دامنه و برد می تواند بازه های باز یا نیم باز باشند.

🌟 **تذکر:** می توان موارد مطرح شده را با هم در یک مسأله ارائه داد.

به طور مثال در تابع $y = kf(ax + b) + c$ ، $y = kf(ax + b) + c$ ، $(a > 0, k > 0)$ را k برابر کرده و c واحد انتقال در راستای محور y ها می دهیم و نمودار f را b واحد در راستای محور x ها انتقال داده و x ها را در $\frac{1}{a}$ ضرب می کنیم.

تمرین ۲

در بند ۵ و ۶ اگر $k < 0$ باشد چه می توان گفت؟

منابع

کتاب ریاضی ۱ و ریاضی ۳ و حسابان ۲ دبیرستان

تمرین ۱

در شکل های داده شده A و B نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$A: y = 2f(4x - 3) + 1, y = \frac{1}{4}f\left(\frac{x}{4} + 1\right) - 3$$

$$B: y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1, y = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

تفریح اندیشه

از میان ۳۴ دانش آموزی که مورد بررسی قرار گرفته اند، ۲۸ نفر در شنا، ۱۹ نفر در اسکی روی آب، ۱۱ نفر در پرش ارتفاع و ۱۷ نفر در دوچرخه سواری شرکت دارند. چنانچه همه دانش آموزان حداقل در یک فعالیت شرکت کرده باشند، و ۱۲ نفر فقط در یک فعالیت، ۸ نفر دقیقاً در دو فعالیت و ۹ نفر دقیقاً در سه فعالیت ورزشی سهیم باشند، چه تعدادی در هر چهار فعالیت شرکت کرده اند؟

پاسخ: $(b + 7 + 11) - 21$

ریاضیات یک صفحه‌ای

♦ مهدی اقبالی‌املشی

ضرب ماتریس‌ها

۱. توابع هموگرافیک

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, g(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}$$

را در نظر بگیرید.

۲. ترکیب fog

$$fog(x) = \frac{(aa' + bc')x + ab' + bd'}{(ca' + dc')x + cb' + dd'}$$

۳. حال ماتریس‌های A و B را که از ضرایب f و g به دست می‌آیند، در هم ضرب کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

۴. یعنی AB، خودش ماتریس ضرایب نظیر در fog است. این شاید بهانه ضرب ماتریس‌ها به این صورتی که هست، بوده باشد.

(با مطالعه کتاب ارزشمند ریاضیدانان نامی، نوشته اریک تمپل‌بل، ترجمه حسن صفاری، این موضوع به ظهور رسید.)

۵. حال برای

$$f(x) = \frac{2x-5}{3x+2}$$

fog(x) را بیابید.

۶.

برای استفاده از ضرب ماتریس‌ها در پیدا کردن ترکیب توابع هموگرافیک، می‌توانید توابع درجه اول را هم به این صورت وارد کنید:

$$f(x) = ax + b = \frac{ax+b}{1}$$

با ماتریس ضرایب

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۷. حالا با فرض

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-2}, g(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$h(x) = 3x - 6$$

بیابید موارد زیر را:

الف) fog

ب) goh

ج) hogof

د) fofof



سجری ابوسعید

ابوسعید احمد بن عبد الحلیل سجری از مشاهیر و ریاضی دانان سیستان و از منجمان معروف قرن چهارم هجری بوده است. وی بیشتر عمر خود را در شیراز گذراند و تاریخ تقریبی دوره زندگی اش بنا به تحقیق سوتر، بین ۳۴۰ تا ۴۱۵ ق بوده است.

برخی از تألیفات ریاضی سجری

رساله فی وصف القطوع المخروطية:

یک نسخه از این رساله در کتابخانه لیدن موجود است و ویکه قسمت مختصری از آن را به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.

رساله فی قسمة الزاوية المستقيمة الخطین بثلاثة اقسام متساوية:

موضوع این رساله تثلیث زاویه است. یک نسخه خطی از آن در کتابخانه لیدن موجود است و ویکه آن را به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.

عمل المسبع فی الدائرة و قسمة الزاوية المستقيمة الخطین ثلاثة اقسام متساوية:

موضوع قسمت اول این رساله محاط کردن هفت ضلعی منتظم در دایره است و موضوع قسمت دوم تثلیث زاویه است. یک نسخه خطی از این رساله در «کتابخانه خدیویه» مصر موجود است و کارل شوی آن را به زبان آلمانی ترجمه کرده است.

رساله فی شکل القطاع:

این رساله را سجری بعد از کتاب «النسبة المولفة» نوشته است، زیرا چندین بار در آن به کتاب النسبة المولفة ارجاع داده است.

ثبت برهین بعض اشکال کتاب اقلیدس:

یک نسخه از این رساله در «یوندا آفیس» موجود است.

رساله فی اخراج الخطوط فی الدوائر الموضوعة من النقط المعطاة:

این رساله مشتمل بر سیزده مسئله هندسی است.

رساله تحصيل القوانین الهندسية المحدودة:

این رساله مشتمل بر یازده قضیه درباره هندسه و مخروطات است و سجری در آن دو تألیف خود به نامهای فی تعلیقات هندسیه و فی خواص القطع الناقص اشاره کرده است.

رساله فی الجواب عن المسائل التي سئل فی حل الاشکال المأخوذة من کتاب المأخوذات لارشمیدس:

این رساله مشتمل بر پانزده مسئله هندسی است و از این رساله یک نسخه خطی در پاریس موجود است. سدو مقدمه و صورت مسائل آن را به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.

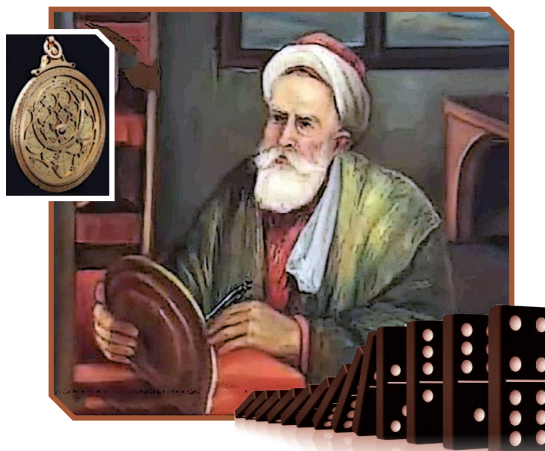
کتاب فی الاجوبة عن مسائل سألها عنه بعض مهندسی شیراز:

این رساله مشتمل بر ده مسئله هندسی است و یک نسخه از آن به خط ابوسعید سجری در پاریس موجود است.

کتاب فی مساحة الاکر بالاکر:

از این کتاب یک نسخه خطی به خط سجری در کتابخانه ملی پاریس موجود است.

و ...



معاصران و نظر دهندگان درباره کارهای سجری

ابوسعید با ابوریحان بیرونی معاصر بوده و در دوره عضدالدوله دیلمی بسیاری از تألیفات خود را به نام عضدالدوله، امیر آل بویه نوشته است. برخی از آثار خود را نیز به سید امیر ابوجعفر احمد بن محمد، از امیران بلخ، تقدیم کرده است. بیرونی بارها در آثار خود از سجری نام برده و راه حل هایی از مسائل هندسه از وی نقل کرده است.

بیرونی در کتاب استیعاب الوجوه الممكنة فی صنعة الاسطرلاب نوشته است: «از ابوسعید سجری اسطرلابی از نوع واحد و بسیط دیدم که از شمالی و جنوبی مرکب نبود و آن را اسطرلاب زورقی می نامید. او را به جهت اختراع این اسطرلاب تحسین بسیار کردم.» بیرونی در این کتاب سه نوع اسطرلاب ساخته شده توسط سجری به نام های شقایقی، آسی و زورقی را شرح داده است.

توصیفی از آثار ریاضی ابوسعید سجری

از آثار سجری مشخص است که ایشان در هندسه بسیار زبردست بوده و تحقیقاتی درباره تقاطع مخروطی کرده است. تا زمان سجری ریاضی دانان مسئله تثلیث زاویه را با روش هندسه متحرک به وجهی تقریبی حل می کردند، ولی سجری این مسئله را به کمک روشی کاملاً هندسی، یعنی تقاطع یک دایره و یک هذلولی متساوی القطرین، حل کرد و آن را «روش هندسه ثابت» نامید.

از سجری حدود ۳۸ کتاب و رساله می شناسیم که حدود ۲۰ کتاب آن در مسائل ریاضی و بقیه درباره احکام نجوم است. مجموعه خطی از کتاب ها و رساله های سجری به دستخط خودش که در شیراز استنساخ کرده، در کتابخانه ملی پاریس به شماره ۲۴۵۷ موجود است. سجری در کتاب المدخل الی علم الهندسه می گوید در سیستان ابزار عظیم و مهمی ساختیم.

منابع

۱. قربانی، ابوالقاسم، (۱۳۷۵). زندگی نامه ریاضی دانان دوره اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ پنجم.
۲. قربانی، ابوالقاسم، (۱۳۵۰). ریاضی دانان ایرانی از خوارزمی تا ابن سینا. انتشارات مدرسه عالی دختران. تهران. چاپ اول.
۳. گلیسپی، چارلز کلتون (۱۳۶۶). زندگی نامه علمی دانشوران. ترجمه احمد بیرشک و دیگران. انتشارات علمی و فرهنگی. تهران.