

برهان دانش و تفکر ریاضی

برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲

۹

شماره:

دوره سوم ← زمستان ۱۴۰۳ ← ۴۸ صفحه ← بها: ۵۰,۰۰۰ تومان

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی



رایانامه: borhan.dtmath2@gmail.com

داده‌کاوی - بررسی تست‌های گسسته و آمار کنکور ۱۴۰۳ - معرفی قنیه کیسی (Casey)
پروانه هادر هندسه - نسبت مساحت‌های چندضلعی‌های متشابه - غفلتی شیرین، عبرتی جالب

امام علی (ع):
دانش گنج عظیمی است
که فنا ناپذیر است.

(غیرالحکم، ۱۲۲۲)

امام علی (ع):
هر کس بر دانشش افزوده شود
ولی هدایتش افزون نکردد،
تنها از خداوند دور شده است.

(المعجزة البيضاء، ص ۲۲۲)

«آموزش و علم» در «آیات و احادیث»

امام صادق (ع):
دانشمند، کسی است
که کردارش، گفتارش را تصدیق کند
و کسی که چنین نباشد، عالم نیست.

(اصول کافی، جلد ۱، ص ۴۴)

امام محمد باقر (ع):
هر کس علم را فراگیرد برای آن که
به وسیله آن بر علما ببالد یا با کم خردان
بستیزد یا مردم را متوجه خود کند، باید
آتش دوزخ را جای نشستن خود گیرد.

(اصول کافی، جلد ۱، ص ۵۹)



برهان دانش و تفکر ریاضی



دوره سوم زمستان ۱۴۰۳ ← ۴۸ صفحه بهای: ۵۰,۰۰۰ تومان ← تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

مجله ریاضی برهان دانش و تفکر ریاضی، از همه دبیران ریاضی، دانش آموزان و علاقه‌مندان به ریاضی در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کاربردی ریاضی (کاربرد در زندگی روزمره و علوم دیگر)
- نگارش مقاله‌های کمک آموزشی (منطبق با سرفصل‌های کتاب درسی ریاضی دوره متوسطه دوم)
- طرح معماها و جدول‌های ریاضی
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان
- نگارش مقاله‌های خواندنی ریاضی، مانند تاریخ ریاضیات، لطیفه‌های علمی و آموزشی و ...
- تهیه گزارش از مدارس موفق و مصاحبه با دبیران و دانش آموزان موفق.

لطفاً در مقاله‌های ارسال شده نکات زیر را در نظر بگیرید:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار دادن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر پیوست و در حاشیه مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی شورای نویسندگان قرار گیرد و پس از تصویب مقاله، سفارش ترجمه به فرستنده مقاله داده خواهد شد.
- در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحه مورد استفاده باشد.
- چکیده‌ای از اثر و مقاله ارسال شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطالب ارسال شود.
- در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده ذکر شود.

هم‌چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

سختن دبیر شورا	حرف اول: ریاضیات و دقت	حمیدرضا امیری	۲
آموزشی	فلسفه ریاضی چیست؟ (۸) فلسفه ریاضیات کاربردی	حمیدرضا امیری	۳
واژگان ریاضی	مقاطع مخروطی	حسین کریمی	۴
تاریخ و فلسفه ریاضی	داستان اعداد (۱) نمادگرایی عددی قرون وسطایی و باروک	محمدحسن گورانی	۸
آموزشی	در حاشیه مثلثات (۲) زاویه و مقیاس‌های اندازه‌گیری آن	حمیدرضا امیری	۱۰
معرفی فراکتال‌ها		اکرم قابل رحمت	۱۴
معرفی قضیه کیسی (Casey)		حسین کریمی	۱۸
در حاشیه تابع		حمیدرضا امیری	۲۰
بررسی تست‌های گسسته و آمار کنکور ۱۴۰۳		محمدحسن گورانی	۲۴
نسبت مساحت‌های چندضلعی‌های متشابه		مریم یزدی داویدجانی	۲۸
آشتی با هندسه		محمدحسن گورانی	۳۳
ریاضیات کاربردی	کاربردهای ریاضیات در فیزیک (موج)	سیدعلاءالدین صلاحی	۳۶
آموزشی	پروانه‌ها در هندسه	سعید هاشمی	۳۹
داده کاوی		مهدی شیروانی	۴۲
غفلتی شیرین، عبرتی جالب		مجتبی سلیمی	۴۶

حرف اول

ریاضیات و دقت

ریاضیات علمی است مادر، که تقریباً در همه علوم و حتی علوم اجتماعی و اقتصادی رفته کرده و کاربرد دارد و به دلیل اشاعه و همه گیر شدن ریاضیات در تمام موضوع های مرتبط با زندگی علمی بشر امروزی و اهمیتی که این علم داراست، به چند ویژگی مهم ریاضیات می پردازیم.

به راستی ریاضیات چه ویژگی های بارزی دارد و این ویژگی ها آیا در ریاضیدان یا حتی در علاقه مندان به علم ریاضی تاثیر می گذارد؟

شاید یکی از اهداف «عمومی کردن ریاضیات» همین تاثیراتی باشد که علم ریاضی بر مخاطبان خود فواید گذاشت. یکی از ویژگی های ریاضیات «دقت» است، کم یا زیاده شدن یک صفر + یا - در نظر گرفتن یک رقم، پس و پیش کردن یک نماد، اضافه یا حذف کردن یک کلمه و ... هر کدام می تواند مسئله ای را به جوابی دیگر رسانده یا صورت مسئله را عوض کند.

آیا این ویژگی بر اشخاصی که با ریاضیات سروکار دارند، تاثیر می گذارد؟ بر شما بطور؟ از ویژگی های دیگر ریاضیات خلاصه نویی و استفاده از مطالب، قضیه ها و مسئله های اثبات شده به عنوان ابزارهایی برای حل مسئله های جدید است و این که همواره به دنبال راه های صمیم و کوتاه باشیم. آیا می توانیم از این ویژگی در زندگی و در برخورد با مسائل و مشکلات احتمالی که ممکن است برای هر شغلی به وجود آید، استفاده کنیم؟ آیا ویژگی های دیگری از ریاضیات که بتواند بر مخاطبان اثرگذار باشد، سراغ دارید؟

نظر شما راجع به نظم منطقی که بین اجزا و بخش های مختلف هر شافیه از ریاضیات، مانند هندسه یا آنالیز با نظریه اعداد وجود دارد و ارتباط آن با نظم و هماهنگی موجود بین اجزای تشکیل دهنده طبیعت و به طور کلی جهان هستی، چیست؟ نظرها و یافته های خود را برای ما ارسال کنید تا از بین آن ها، بهترین ها را انتخاب و در مجله خودتان، چاپ کنیم.

والسلام - دبیر شورای سردبیری

فلسفه ریاضی

چیست؟

قسمت هشتم

فلسفه ریاضیات کاربردی

اشاره: بیان اصول موضوعه، اثبات قضیه‌ها و گزاره‌های درست، احکام کلی و روش‌های اثبات آن‌ها و یا زدن مثال نقض برای رد آن‌ها و بازنمایی‌های مختلف برای اثبات‌ها و برهان‌های قضایا و مسائل، همراه با دیدگاه‌های متفاوت فلسفی با چه انگیزه یا انگیزه‌هایی انجام می‌پذیرد. این تئوریه‌ها، نظریه‌ها، حدسها و اثبات‌ها چه نقشی در زندگی روزمره و چه تأثیراتی بر علوم طبیعی دارد؟

اشیای هندسی عمل بازنمایی را به عهده داشتند. به عنوان مثال گالیله سرعت یک جسم در حال سقوط را با دنباله‌ای از مساحت‌های در حال افزایش شکل‌های هندسی بازنمایی کرد، اما در دوره‌های بعد قدرت شگرف حسابان نقش مسلط را به آنالیز داد و هندسه را به حاشیه برد.

از طرفی رنگ، زیبایی، گرمایی که حس می‌کنیم و شدت درد و چیزهای دیگری از این قبیل به سادگی قابلیت ریاضی‌سازی ندارند. اما مانند موسیقی ساختار لازم و مناسب را برای ریاضی‌سازی دارند. اگر بپذیریم که ریاضیات برای علم ضروری است، بنابراین باید صادق باشد و چون صادق است باید اشیای ریاضی همچون اعداد، مجموعه‌ها، تابع‌ها و غیره وجود داشته باشد.

در بازنمایی (مدل‌بندی) ریاضیاتی، بیشتر با واقعیت‌های علم رو به رو هستیم و در بسیاری از موارد این بازنمایی یا مدل‌بندی به فهم و پیشرفت آن واقعیت علمی کمک می‌کند، اما گروهی نیز اعتقاد دارند که ریاضیات جهان را توصیف می‌کند.

در واقع توصیف ریاضیاتی یک واقعیت علمی با این فرض که ساختار و مدل در همان واقعیت علمی (مثلاً فیزیکی) وجود دارد به توصیف آن ساختار یا الگو می‌پردازد، در صورتی که در بازنمایی ریاضیاتی، یک مدل برای ساختار آن واقعیت علمی در نظر گرفته می‌شود که در هر صورت در هر دو حالت کاربردهایی از ریاضیات را مشاهده می‌کنیم. آیا علمی از علوم سراغ دارید که از ریاضیات کاربردی، بهره نبرده باشد؟

تقریباً همه مکاتب فلسفی بر این باورند که پیشرفت و گسترش ریاضیات همواره مدیون دو عامل «درونی» و «بیرونی» است. عامل درونی همان زیبایی‌ها و ویژگی‌های ذاتی ریاضیات است و عامل بیرونی نیازهای بشری یا همان کاربردهای ریاضیات است. این که این قطار روی یک ریل حرکت می‌کند (مونوریل) و گاهی این ریل از ریاضیات محض به کاربردی یا از کاربردی به محض تغییر می‌کند، یا این که همواره روی دو ریل به حرکت خود ادامه می‌دهد، چالشی است که هم ریاضی‌دانان و هم فلاسفه علم ریاضی با آن روبرو و پاسخ‌های متفاوتی برای آن دارند. در هر حال توصیف نقش دقیق ریاضیات در کاربردهای گوناگون، بسیار دشوار است. در این مبحث (فلسفه ریاضیات کاربردی) سه پرسش بنیست‌عام، دارای اهمیت هستند:

اول این که ریاضیات چگونه با عالم خارج اتصال و ارتباط پیدا می‌کند؟ این سوال مستقیماً مربوط به شاخه‌ای فنی از فلسفه ریاضی به نام اندازه‌گیری است.

دوم این که آیا بعضی از اشیای مورد ارجاع در نظریه‌های گوناگون صرفاً اشیای ریاضی‌اند یا ارتباط و اتصال با ریاضیات ندارند؟ به طور مثال آیا موضوع فضا - زمان و حالت کوانتومی جدای از بازنماییهای ریاضی آنها وجود دارند یا چیزی جز اشیای ریاضی نیستند؟

سوم این که آیا ریاضیات برای علوم ضروری است؟

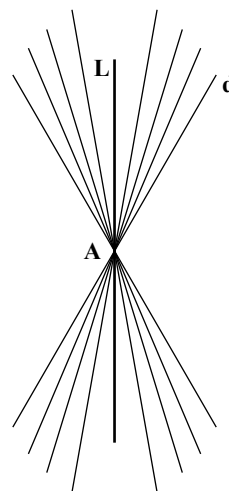
البته تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که همواره بازنمایی ریاضی دنیا بر اساس اعداد نبوده است. در زمان یونانیان تا گالیله و پس از آن،



اشاره

دانش آموزان در کلاس دوازدهم (تجربی و ریاضی) یا مقاطع مخروطی آشنا می‌شوند. در این متن می‌خواهیم به بررسی واژه‌های سطح مخروطی، مقطع مخروطی، مکان هندسی، دایره، سهمی، بیضی، هذلولی و خاصیت بازتابش بپردازیم.

۱. سطح (رویه) مخروطی: فرض کنید دو خط d و L در نقطه A متقاطع (غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط L را، یک رویه (سطح) مخروطی می‌نامیم. در این حالت خط L را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

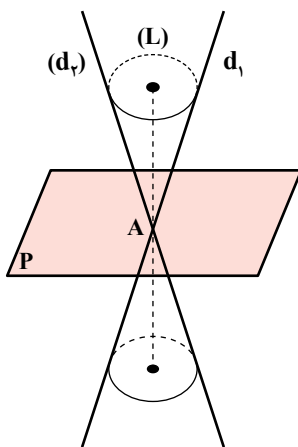


تذکر: سطح مخروطی از هر دو طرف تا بی‌نهایت تداوم دارد و نباید آن را با مخروط یا سطح مخروط اشتباه گرفت.

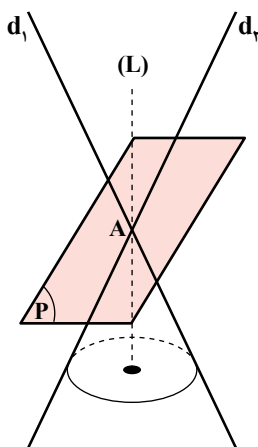
آنچه در بالا بیان شد، تعریف سطح مخروطی دوار هست که در کتاب درسی از آن به‌عنوان سطح مخروطی یاد شده است که با تعریف دقیق و کلی سطح مخروطی تفاوت دارد.

۲. مقطع مخروطی: هرگاه یک صفحه، سطح مخروطی را در یک یا در دو سمت نقطه A قطع کند، فصل مشترک پدید آمده را، مقطع مخروطی گوئیم.

تذکر: اگر صفحه قاطع از نقطه A (رأس سطح مخروطی) بگذرد، آنگاه مقطع حاصل یا یک نقطه (شکل ۱) و یا یک خط (شکل ۲) و یا دو خط متقاطع خواهد بود (شکل ۳) در شکل ۲ صفحه، مماس با سطح مخروطی و در شکل ۳ صفحه، شامل محور L می‌باشد که محور نیز، نیمساز زاویه بین دو خط متقاطع می‌باشد.

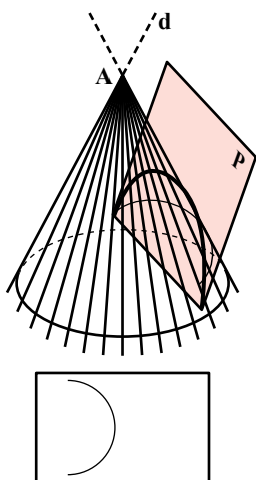


شکل ۱



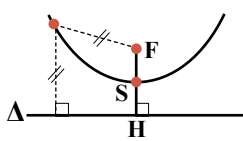
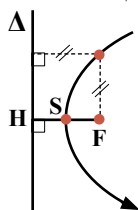
شکل ۲

۵. **سهمی:** هرگاه صفحه به موازات مولد d ، سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک پدید آمده را که یک منحنی باز است، سهمی گوئیم.

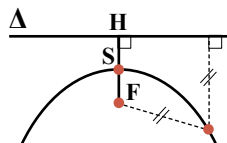
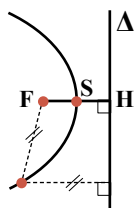


سهمی را به صورت زیر نیز تعریف می کنند:
سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت خارج آن خط واقع در آن صفحه، به یک فاصله باشند.

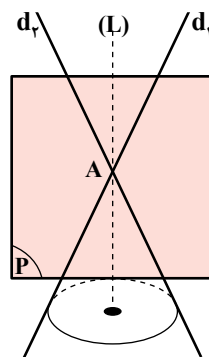
اگر $S(\alpha, \beta)$ رأس سهمی و نصف ممیز (پارامتر) سهمی را با a نشان دهیم ($HS = SF = a$) و نقطه ثابت (کانون) را با F و خط ثابت (خط هادی) را با Δ ، آنگاه داریم:



$$\begin{cases} (y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha) \\ a > 0, F(\alpha+a, \beta) \\ \Delta: x = \alpha - a \end{cases} \quad \begin{cases} (x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta) \\ a > 0, F(\alpha, \beta+a) \\ \Delta: y = \beta - a \end{cases}$$



$$\begin{cases} (y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha) \\ a < 0, F(\alpha+a, \beta) \\ \Delta: x = \alpha - a \end{cases} \quad \begin{cases} (x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta) \\ a < 0, F(\alpha, \beta+a) \\ \Delta: y = \beta - a \end{cases}$$

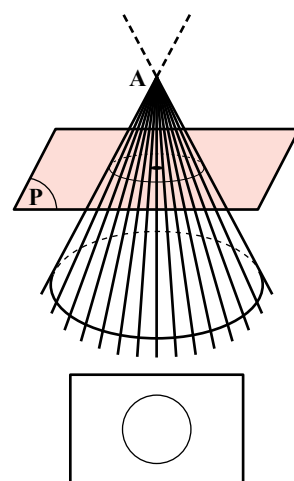


شکل ۳

اگر صفحه قاطع، از نقطه A نگذرد مقطع حاصل یکی از چهار حالت (دایره، سهمی، بیضی و یا هذلولی) خواهد بود. از اینجا به بعد صفحه را ناگذرا از A در نظر می گیریم.

۳. **مکان هندسی:** مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آن ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

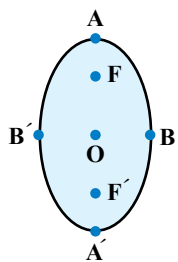
۴. **دایره:** هرگاه صفحه قاطع عمود بر محور L باشد، فصل مشترک با سطح مخروطی را دایره گوئیم.



دایره را به صورت زیر نیز تعریف می کنند: دایره مکان هندسی نقطه ای از یک صفحه است که از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه (که مرکز دایره نامیده می شود) به فاصله ثابتی باشد (که آن را اندازه شعاع گوئیم).

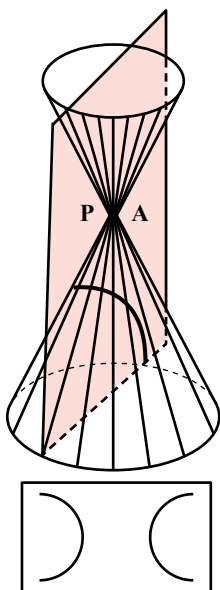
اگر $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره و اندازه شعاع آن R باشد، معادله دایره عبارت است از:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$



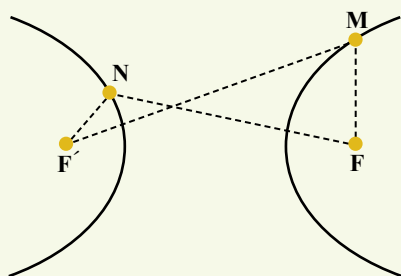
$$\begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1 \\ A(\alpha, \beta+a), A'(\alpha, \beta-a) \\ B(\alpha+b, \beta), B'(\alpha-b, \beta) \\ F(\alpha, \beta+c), F'(\alpha, \beta-c) \end{cases}$$

۷. **هذلولی:** هرگاه صفحه قاطع، برخی از مولدها را در یک طرف A و برخی دیگر را در طرف دیگر آن قطع کند (یعنی هر دو دامنۀ سطح مخروطی را قطع کند) در این حالت مقطع، یک منحنی است مرکب از دو شاخۀ متمایز و نامسدود که به آن هذلولی گویند.



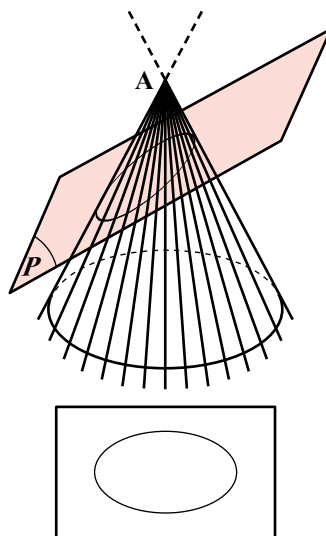
تذکره: هذلولی را به صورت زیر نیز تعریف می کنند:

هذلولی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که تفاضل فاصله هایشان از دو نقطۀ ثابت (کانون ها) واقع در آن صفحه، مساوی مقدار ثابتی باشد.



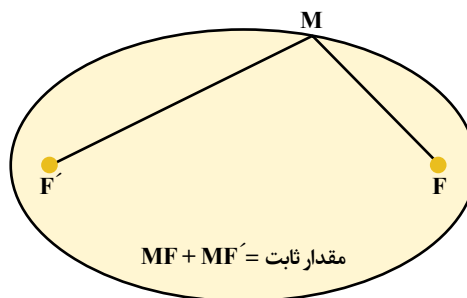
$$|MF - MF'| = |NF - NF'| = \text{مقدار ثابت}$$

۶. **بیضی:** هرگاه صفحه قاطع بر محور عمود نباشد، اما تمام مولدها را در یک طرف رأس A قطع کند، در این صورت مقطع، یک منحنی بسته است که آن را بیضی می نامند.



بیضی را به صورت زیر نیز تعریف می کنند:

بیضی مکان هندسیۀ نقاطی از یک صفحه است که مجموع فاصله های آن از دو نقطۀ ثابت واقع در آن صفحه، مساوی مقدار ثابتی باشد.

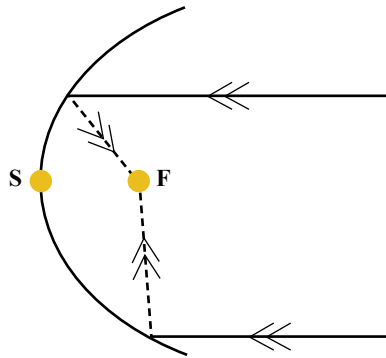


بافرض آنکه مرکز بیضی $O(\alpha, \beta)$ و قطر بزرگ $(A'A = 2a)$ و قطر کوچک $(B'B = 2b)$ و فاصله کانونی $(FF' = 2c)$ که در آن $a^2 = b^2 + c^2$ داریم:

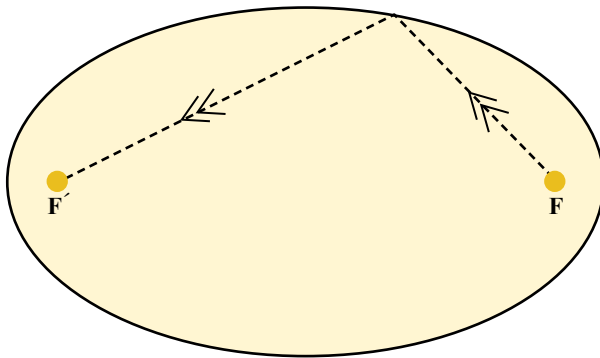
$$\begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \\ A(\alpha+a, \beta), A'(\alpha-a, \beta) \\ B(\alpha, \beta+b), B'(\alpha, \beta-b) \\ F(\alpha+c, \beta), F'(\alpha-c, \beta) \end{cases}$$

۸. خاصیت بازتابشی در مقاطع مخروطی:

الف. سهمی: اگر پرتویی به موازات محور تقارن سهمی بر سهمی بتابد، شعاع‌های بازتابش از کانون می‌گذرند (اساس طراحی دیش‌های ماهواره‌ای) و اگر پرتوی از کانون خارج شود، شعاع‌های بازتابش به موازات محور تقارن سهمی خواهند بود. (اساس طراحی چراغ‌های خودرو)



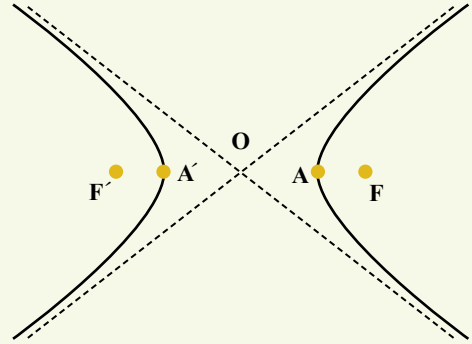
ب. بیضی: اگر پرتوی از یک کانون بیضی خارج شود، پس از برخورد با بیضی، شعاع بازتابش از کانون دیگر خواهد گذشت. (اساس طراحی سالن‌های آمفی تئاتر)



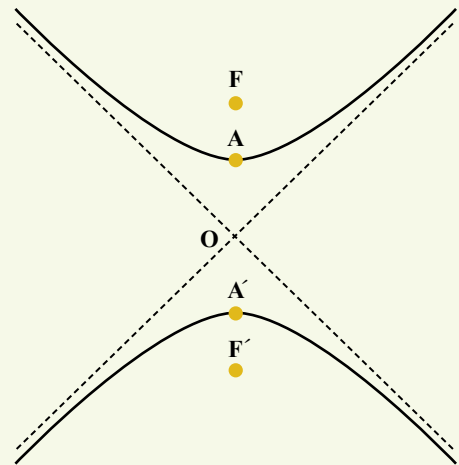
ج. هذلولی: اگر پرتوی از یک کانون هذلولی خارج شود پس از برخورد با هذلولی، شعاع بازتابش از کانون دیگر خواهد گذشت. (اساس طراحی رادارهای زیردریایی)



با فرض آنکه مرکز هذلولی $O(\alpha, \beta)$ و قطر کانونی $(AA' = 2a)$ و فاصله کانونی $(FF' = 2c)$ و داریم: $c^2 = a^2 + b^2$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \\ A(\alpha+a, \beta), A'(\alpha-a, \beta) \\ F(\alpha+c, \beta), F'(\alpha-c, \beta) \\ \text{مجانباتها: } (y-\beta) = \pm \frac{b}{a}(x-\alpha) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \\ A(\alpha, \beta+a), A'(\alpha, \beta-a) \\ F(\alpha, \beta+c), F'(\alpha, \beta-c) \\ \text{مجانباتها: } (y-\beta) = \pm \frac{a}{b}(x-\alpha) \end{array} \right.$$

داستان اعداد

بخش اول

نمادگرایی عددی
قرون وسطایی و باروک

اشاره

با سلام خدمت همه شما عزیزان

خوشحالم که عمرم به دنیا بود و توانستم باز هم خدمت شما خوبان باشم نمی‌دانم در جریان باشید یا خیر از شماره گذشته تا امروز دو تا اتفاق ناگوار جامعه ریاضی کشور را غمگین کرد یکی از آنها درگذشت جناب دکتر ریحانی بود و دیگری استاد ارجمند جناب دکتر محمودیان بود که هر دو علاوه بر اینکه از اساتید به نام دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و شریف بودند مؤلف کتب درسی و سرگروه تیم‌های المپیادهای ریاضی هم بودند به احترام نام آنها فاتحه‌ای بخوانید و انشالله ادامه دهنده راهشان باشید. در هر حال دنیا همین است و تابوده و تا هست همین است یادشان گرامی باد

مسیحیت قرون وسطایی هم همان سنتی که در میان فرقه‌های غنوصی رواج داشت، ادامه داد.

سویلی (Isidore of seville) حدود سال ۶۰۰ م در جایی نوشت «اگر از همه چیز عدد را بگیری نابود خواهد شد» در اندیشه‌های قرون وسطایی نمادگرایی عددی همراه با اندیشه‌های طالع‌بینی رسوخ کرده بود و کلیسا هم از آن بهره فراوانی می‌برد. مایر (Heinz Meyer) در جای دیگر گفته است «آیا کتاب مقدس نمی‌گوید که همه امور در اندازه و عدد و وزن مرتب شده‌اند؟ همه چیزی در جهان نمی‌تواند بدون ترتیب باشد و بنابراین، چنان‌که آگوستین می‌گوید اعداد شکل حکمت الهی حاضر در جهان‌اند که با روح انسان تشخیص داده می‌شود.

در هر حال تأویل و تفسیر کتاب مقدس بر پایه اعداد تا حدود قرن نوزدهم ادامه داشته است امروزه علمی را به عنوان علم حروف (علم جفر) داریم که در قرون نخست میلادی به صورت نوعی از فلسفه قوا و خواص برخی از اعداد پدید آمد.





طبیعت چهار بازو دارد، در تمام دنیا شاهان را صاحب چهار دریا، چهار خورشید و چهار گوشه جهان می‌دانند!

در ریاضی چهار عمل اصلی داریم!

شیمی آلی بر چهار عنصر کربن، اکسیژن، هیدروژن و نیتروژن داریم. بادها بر چهار قسم‌اند، صبا، دبور، شمال و جنوب حالا آتمن در دین هندوها شامل جاگرات، اسواینه، سوشپتا و توریا، است.

در کتاب تورات نام چهار پیامبر بزرگ آمده است که آن‌ها عبارتند از: اشمیا، ارمیا، حزقیال و دانیال است. نام آدم (ADAM) نیز نماینده عدد چهار است و بنابر نوشته‌های یونانی، تلویحاً اشاره به چهار جهت اصلی (Nesembria, Arkto, Susis, Anutole) دارد که او را نماینده و بنای مادی می‌خوانند.

در فرهنگ چینی، چهار عدد شرافت است.

در مصر باستان سقف آسمان با چهار ستون نگه داشته شده است و از این رو چهار عدد مقدس است. آنان معتقدند که چهار پسر هوروس از چهار جهت اصلی نگهداری می‌کنند.

فیثاغورسی‌ها اعداد چهار را الهی می‌دانستند چرا که از جمع چهار عدد اول، عدد ده بوجود می‌آید.

$$(1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 10)$$

دقت کرده‌اید در اصفهان «چهار باغ» داریم که شهر را بر مبنای آن ساخته‌اند.

معنای نمادین چهار، با مربع و صلیب ارتباط دارد وجود صلیب در مربع نشان‌دهنده پویایی و زنده بودن چهار است. بروید چهارهای دنیا را بیابید.

«یا علی»

یکی از کتبی که از قرون وسطا مانده است کتابی به نام Mathesis اثر فیرمیکوس ماترنوس (Firmicus Maternus) (حدود ۳۲۶ م) که به‌طور تخصصی در مورد طالع‌بینی است. تأثیر مارتیانوس کلابا (Martianus Capella) که در قرن پنجم می‌زیست از آن هم بیشتر بود او کتاب خود ۷ کنیز را که نماد ۷ علم مقدماتی بودند، بر گرد عروس گذاشت و کتاب هفتم درباره حساب نشان می‌دهد چگونه ده عدد به خدایان یونانی مربوط می‌شوند.

کابلا از ۱ یا موند که به ژوبیتر ارتباط دارد، شروع می‌کند و سپس به سراغ ۲ مربوط به ژونو (مؤنث و عدد فصل و وصل مجدد می‌رود و سرانجام به ۱۰ عدد خدای دو چهره ژانوس می‌رسد. و به‌طور کلی دانشمندان قرون وسطا خیان اهمیت و تأثیر اعداد اعتقاد را داشتند که می‌کوشیدند نوشته‌هایشان را با توجه به ترکیبات معنادار اعداد مرتب کنند.

«شهر خدا» اثر اگوستین مثال اعلای چنین کوششی است امیدوارم در شماره آینده بتوانیم این بحث را ادامه دهیم حالا برویم سراغ عدد ۴ و با این عدد آشنا می‌شویم.

■ «چهار»

این عدد یکی از کامل‌ترین ارقام است. چهار یعنی کلیت، تمامیت، زمین، نظم، عقل، اندازه و عدل، این عدد نشان‌دهنده چهار جهت اصلی، چهار فصل سال اضلاع مربع چهار عنصر هستی، چهار ستون عالم، چهار منزل قمر، چهار مزاج، چهار رود بهشت و ... راستی تعداد و عوالم چهار تا است عالم ناسوت، عالم ملکوت، عالم جبروت، عالم لاهوت.

در حاشیه مثلثات



قسمت دوم

زاویه و مقیاس های اندازه گیری آن

■ تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه:

الف. اگر α ، زاویه ای در مثلث قائم الزاویه باشد، سینوس این زاویه، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sin \alpha = \frac{\text{اندازه ضلع روبه رو } \alpha}{\text{اندازه وتر}}$$

ب. اگر α ، زاویه ای حاده در مثلث قائم الزاویه باشد، کسینوس این زاویه، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\cos \alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور } \alpha}{\text{اندازه وتر}}$$

ج. اگر α ، زاویه ای حاده در مثلث قائم الزاویه باشد، تانژانت این زاویه، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tan \alpha = \frac{\text{اندازه ضلع روبه رو } \alpha}{\text{اندازه ضلع مجاور } \alpha}$$

د. اگر α ، زاویه ای حاده در مثلث قائم الزاویه باشد، کتانژانت این زاویه، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\cot \alpha = \frac{\text{اندازه ضلع روبه رو } \alpha}{\text{اندازه ضلع مجاور } \alpha}$$

■ نسبت های مثلثاتی و مثلث قائم الزاویه:

تعریف ها و قضیه هایی در ذیل خواهد آمد که بعضی از آن ها در مباحث آینده مورد استفاده قرار خواهند گرفت، این قضیه ها را بدون اثبات بیان کرده ایم.

تعریف: هر مثلث که دارای یک زاویه قائمه باشد، مثلث قائم الزاویه می نامیم.

تعریف: در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع روبه رو به زاویه قائمه را وتر می نامیم.

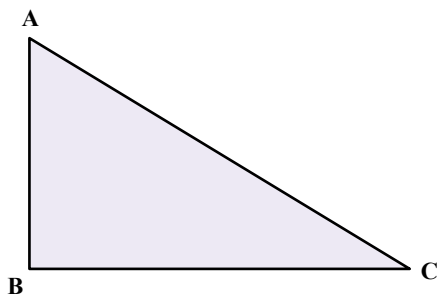
← **قضیه ۱:** (پیتاگورس) در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه مربع وتر، برابر است با مجموع مربعات اندازه های دو ضلع دیگر.

← **قضیه ۲:** در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع روبه رو به زاویه 30° درجه، نصف وتر است.

← **قضیه ۳:** هرگاه وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه ای، با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث هم نهشتند.

فرض کنیم: مثلث ABC در رأس B قائمه باشد (شکل ۱)
در این صورت طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$



شکل ۱

حال دو طرف این رابطه را بر $\overline{AC}^2$ (مربع اندازه وتر) تقسیم می‌کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} = 1 \quad \text{که با توجه به تعریف‌های سینوس و کسینوس برای زاویه‌های حاده داریم:}$$

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} = 1 \Rightarrow \sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

$$\text{یا } \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

پس اگر به‌طور کلی α ، زاویه‌ای حاده در مثلث قائم‌الزاویه باشد، رابطه زیر همواره برقرار است، که آن را رابطه اساسی مثلثات می‌نامیم.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

رابطه بالا را با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های منفرجه و حاده، می‌توان تعمیم داده و به‌طور کلی برای هر زاویه (حاده، منفرجه و قائمه) اثبات کرد.

■ محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° ، ۶۰° و ۴۵° درجه:

الف. زاویه ۳۰° درجه: در مثلث قائم‌الزاویه ABC فرض کنیم

هـ. عکس کسینوس هر زاویه را سکانت آن زاویه می‌نامیم:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

و. عکس سینوس هر زاویه را کسکانت آن زاویه می‌نامیم:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

تبصره ۱: با توجه به بند «ج» و «د»، مشاهده می‌شود که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ عکس یکدیگرند، یعنی:

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan^n \alpha \cdot \cot^n \alpha = 1}$$

پس $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ از هر توانی، عکس یکدیگر و حاصل ضربشان مساوی یک می‌شود.

تبصره ۲: با توجه به تعریف تانژانت، سینوس و کسینوس که قبلاً ذکر کردیم، داریم:

$$\tan = \frac{\text{اندازه ضلع روبه‌رو } \alpha}{\text{اندازه ضلع مجاور } \alpha}$$

حال صورت و مخرج را بر اندازه وتر تقسیم می‌کنیم.

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{\text{اندازه ضلع روبه‌رو } \alpha}{\text{اندازه وتر}}}{\frac{\text{اندازه ضلع مجاور } \alpha}{\text{اندازه وتر}}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{پس ثابت شد: } \boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \quad (۱)$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \boxed{\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \quad (۲)$$

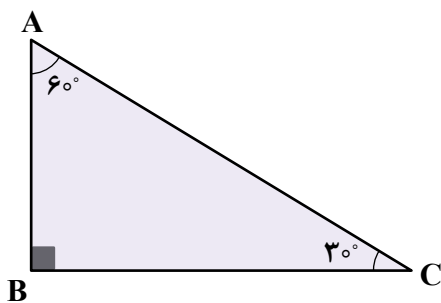
نتیجه:

$$(۱) \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha, \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$$

$$(۲) \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cot \alpha, \sin \alpha = \frac{\cos \alpha}{\cot \alpha}$$

$$\Rightarrow \cot 3^\circ = \sqrt{3} \left(\cot x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \cot 3^\circ = \frac{1}{\tan 3^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \right)$$

ب. زاویه 6° : فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویه $\angle A = 6^\circ$ (مطابق شکل ۳) با توجه به این که مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° درجه است، لذا $\angle C = 3^\circ$ پس طبق قضیه ضلع روبه‌روی این زاویه، یعنی AB، نصف وتر است $AB = \frac{AC}{2}$ یا $AC = 2AB$.



شکل ۳

$$\text{داریم: } \cos 6^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 6^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{طبق فرمول اساسی}$$

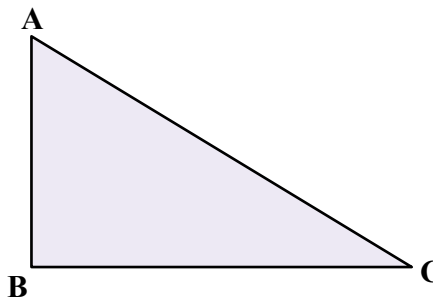
$$\Rightarrow \sin^2 6^\circ = 1 - \cos^2 6^\circ = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 6^\circ = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan 6^\circ = \frac{\sin 6^\circ}{\cos 6^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 6^\circ = \frac{1}{\tan 6^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ج. زاویه 45° : فرض کنیم مثلث ABC در رأس B قائمه و زاویه $\angle C = 45^\circ$ ، بنابراین واضح است که $\angle A = 45^\circ$ (مجموع زاویه‌های داخلی 180° است؛ یعنی مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است (مطابق شکل ۴) پس $AB = BC$.

$\hat{C} = 3^\circ$ (شکل ۲) طبق قضیه ضلع روبه‌روی این زاویه، نصف وتر است؛ یعنی



شکل ۲

$$\Rightarrow \sin C = \frac{AB}{AC} \quad \text{از طرفی داریم}$$

$$AB = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2AB$$

$$\Rightarrow \sin 3^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

حال با توجه به فرمول اساسی مثلثات، یعنی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، داریم:

$$\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 3^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 3^\circ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{با توجه به تعریف تانژانت}$$

$$\Rightarrow \tan 3^\circ = \frac{\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan 3^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{و نیز داریم}$$

$$\Rightarrow \cot 3^\circ = \frac{\cos 3^\circ}{\sin 3^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

طبق فرمول اساسی داریم:

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$$

$$\xrightarrow{(1)} \sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 45^\circ = 1 \Rightarrow \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{(1)} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

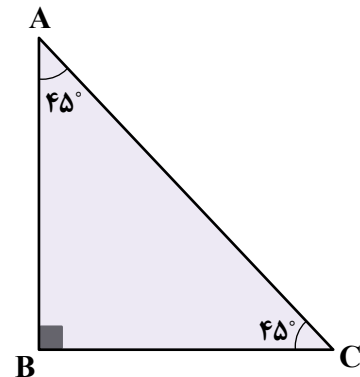
$$\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} \Rightarrow \cot 45^\circ = 1$$

چون:

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} \\ \cos A &= \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} \end{aligned} \right\}$$

$$(1) \Rightarrow \sin 45^\circ = \cos 45^\circ \Rightarrow \text{از طرفی}$$



شکل ۴

تفریح اندیشه

مربع وفقی

مربع وفقی زیر ظاهر ساده، اما در واقع بسیار غیرمتعارف است. چون اعداد آن را به طور قائم، افقی یا سطری جمع کنیم حاصل ۲۶۴ است.

۱۸	۹۹	۸۶	۶۱
۶۶	۸۱	۹۸	۱۹
۹۱	۱۶	۶۹	۸۸
۸۹	۶۸	۱۱	۹۶

در مربع وفقی چهار در چهاری چون این مربع می توان انتظار داشت که چهار مربع گوشه ای، چهار مربع میانی، و هریک از چهار مربع موجود به مجموع وفقی یکسانی برسند. تا اینجا مطلب شگفت انگیزی موجود نیست.

در این صورت ویژگی جالب این مربع وفقی چیست؟ این دقیقاً همان چیزی است که باید بیابید.

این مربع وفقی را می توان به گونه ای دیگر نیز نوشت. در این صورت می توانیم به راحتی متوجه شویم که این مربع وفقی چیست.



مقدمه: فراکتال‌ها، ساختارهای ریاضی پیچیده‌ای هستند که در بسیاری از پدیده‌های طبیعی و فنی مشاهده می‌شوند. این اشکال به دلیل ویژگی‌های خود مشابهی، پیچیدگی‌های فراوان، و کاربردهای گسترده در زمینه‌های مختلف، از ریاضیات تا هنر، از علوم زیستی تا فناوری‌های نوین، توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. در این مقاله به تاریخچه و تعریف فراکتال و همچنین کاربردهای مختلف آن در زندگی روزمره، طبیعت و صنعت می‌پردازیم و بررسی می‌کنیم که چگونه این الگوهای منحصر به فرد در طراحی و بهینه‌سازی بخش‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند.

■ تاریخچه و ریاضیدانان اصلی:

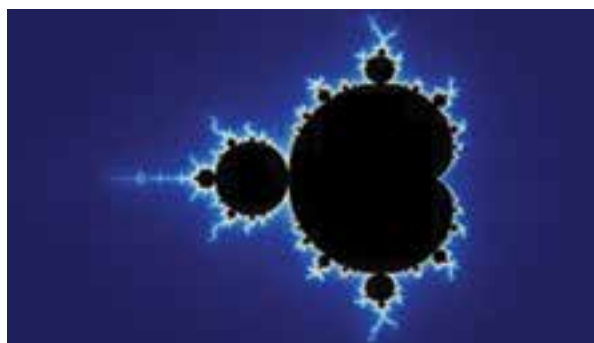
مفهوم فراکتال به قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم باز می‌گردد. ریاضیدانانی مانند جورج کانتور، هلموت کخ و فلیکس هاوسدورف، با مطالعه ساختارهای غیرمعمول، مفاهیم اولیه فراکتالی را پایه‌گذاری کردند.

واژه «فراکتال» به‌طور رسمی توسط بنوا ماندلبرو^۱ در سال ۱۹۶۷ معرفی شد.

ماندلبرو، با استفاده از کامپیوتر و مدل‌سازی ریاضی، توانست پیچیدگی‌های ساختار فراکتالی را به تصویر بکشد و کاربردهای گسترده‌ای برای آن بیابد.



بنوا ماندلبرو



■ تعریف اولیه فراکتال (Fractal):

فراکتال‌ها، اشکال هندسی هستند که در هر مقیاسی که مورد بررسی قرار گیرند خود مشابهی دارند، به این معنا که هر بخش از یک فراکتال به شکل کلی آن شبیه است. ویژگی‌های اصلی فراکتال‌ها عبارتند از:

- **خودمشابهی:** ساختارهایی که در هر سطحی از بزرگ‌نمایی یا کوچک‌نمایی به نظر یکسان می‌آیند.
- **پیچیدگی بی‌نهایت:** هر چه به فراکتال‌ها نزدیک‌تر می‌شویم، جزئیات بیشتری ظاهر می‌شوند.

بنابراین فراکتال‌ها، ساختار هندسی عجیبی است که با بزرگ کردن هر بخش آن به نسبت معین، همان ساختار نخستین به‌دست می‌آید، ساختاری که هر بخش آن با کلش همانند است. ساختار جادویی فراکتال‌ها ذهن آدمی را به شدت درگیر خود می‌کند و شاید به همین دلیل است که در معماری و هندسه ردپای آن‌ها زیاد به چشم می‌خورد اما همان‌طور که در مقاله زیر خواهیم دید فراکتال‌ها با بسیاری از بخش‌های زندگی روزمره ما در هم تنیده شده‌اند.

در شماره ۷ مجله در مقاله‌ای به مثث سرپینسکی و چگونگی ایجاد آن اشاره گردید که در ذیل مشاهده می‌کنید.

■ ساختارهای فراکتالی در جانوران و انسان‌ها:

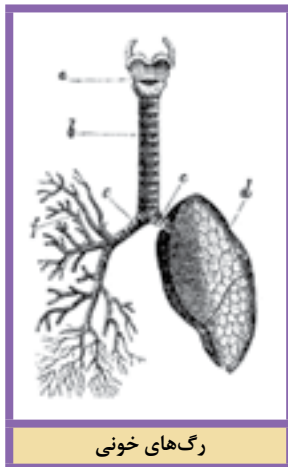
بسیاری از سیستم‌های زیستی در جانوران نیز الگوهای فراکتالی دارند به عنوان مثال، رگ‌های خونی در بدن انسان و جانوران به شکل فراکتالی طراحی شده‌اند تا بتوانند خود را به طور یکنواخت در سراسر بدن انسان توزیع کنند.

ساختار شاخه‌ای ریه‌ها هم بسیار جالب است.

وقتی نفس می‌کشید با انبساط شش‌هایتان هوا، ۵۰۰ میلیون آلوئول (کیسه‌های هوایی) را پر می‌کند که هر کدام از آن‌ها کسری از یک میلی‌مترند. با عمل بازدم، میلیون‌ها بسته هوایی کوچک، بدون زحمت، از طریق گذرگاه هوایی، به صورت یک نفس بزرگتر با هم ادغام می‌شوند این گذرگاه هوایی فراکتال هستند.



مغز انسان



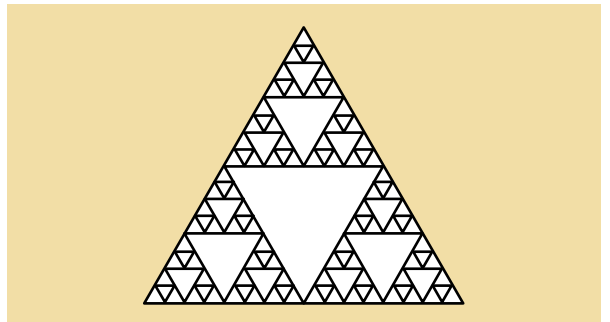
رگ‌های خونی



شش

■ فراکتال‌ها در زمین‌شناسی و هواشناسی

الگوهای فراکتالی در طراحی و شکل‌گیری خطوط ساحلی، کوه‌ها و رودخانه‌ها مشاهده می‌شوند. این ساختارها به ما کمک می‌کنند تا فرآیندهای طبیعی را بهتر درک کنیم و هم‌چنین مدل‌سازی دقیقی از آن‌ها برای پیش‌بینی تغییرات زیست محیطی انجام دهیم. استفاده از فراکتال‌ها در مدل‌سازی این ساختارها می‌تواند دقت تحلیل در زمین‌شناسی را افزایش دهد.



امروزه فراکتال‌ها با زندگی ما در هم تنیده شده‌اند و در علوم مختلف کاربردهای فراوانی دارند که در ذیل چند نمونه از آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

■ ساختارهای فراکتالی در گیاهان:

در طراحی ساختار گیاهان، فراکتال‌ها نقش مهمی ایفا می‌کنند. برای مثال، شاخه‌های درختان و توزیع برگ‌ها بر روی آن‌ها الگوهای فراکتالی دارند که باعث می‌شود گیاه بتواند بیشترین میزان نور خورشید را جذب کند و در عین حال با حداقل استفاده از منابع، به رشد خود ادامه دهد. شکل‌گیری گل‌ها و توزیع دانه‌ها دارای الگوهای فراکتالی هستند. این طراحی‌ها در بسیاری از گیاهان مانند گل کلم اجازه می‌دهند که به شکل بهینه از منابع در دسترس خود استفاده کنند.

در تصاویر زیر نمایش ساختار فراکتالی در گل کلم و برگ درختان به تصویر کشیده شده است.



گیاه الوعیه‌لی فیلا



گل کلم

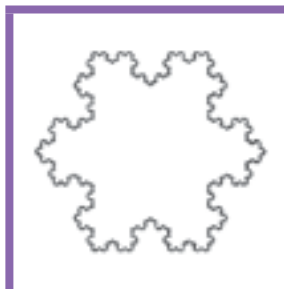


برگ سرخس

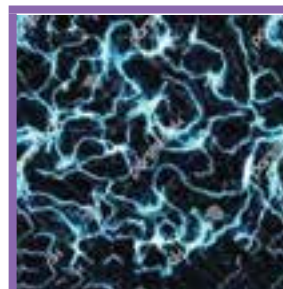
طراحی الگوهای هنری و تزئینات

فراکتال‌ها در طراحی آثار هنری دیجیتال نیز به کار می‌روند. هنرمندان با استفاده از این الگوها، طراحی‌هایی پیچیده و جذاب خلق می‌کنند که می‌تواند در نقاشی‌های دیجیتال، پوسترها، ساختمان‌ها و ... به کار رود.

این الگوها به دلیل تکرارپذیری و خودمشابهی، تأثیر بصری قوی ایجاد می‌کنند تصاویر زیر نمونه‌ای از آثار هنری دیجیتال که با استفاده از فراکتال‌ها طراحی شده‌اند.



برف‌دانه کخ



رعد و برق



معماری



خط ساحلی



معماری ایرانی



نقاشی



طبیعت و هنر

الگوهای فراکتالی به ما کمک می‌کنند تا الگوهای پیچیده آب و هوایی را تحلیل و پیش‌بینی کنیم. به عنوان مثال، الگوهای رعد و برق، ابرها و طوفان‌ها دارای ویژگی‌های فراکتالی هستند. استفاده از این مفاهیم در مدل‌سازی جوی می‌تواند به بهبود دقت پیش‌بینی‌های هواشناسی منجر شود.



بازار مالی



ساختار فراکتال در بازارهای مالی

تصاویر بالا نمودارهایی از تحلیل فراکتالی را در بازارهای مالی نشان می‌دهد.

دانش‌آموزان عزیز

سعی کردیم مقدمه‌ای از فراکتال‌ها و کاربرد آن را در چند زمینه بگوییم البته کاربردهای دیگری از جمله در صنعت، ساختار زیست‌بوم‌ها، مدیریت ریسک، محیط زیست و اکولوژی، ابزارهای پزشکی، فناوری‌های نانو و غیره می‌توان ارائه نمود که بسیار زیادند و در این مقاله جا نمی‌گیرد. از طرفی تمام این مدل‌سازی‌ها با روابط ریاضی هستند که در سطح دانش‌آموزان دبیرستانی نیستند.

نتیجه‌گیری:

بسیاری از دانشمندان دریافته‌اند که فراکتال‌ها به‌عنوان ساختارهایی با ویژگی خود مشابهی و پیچیدگی بی‌نهایت نقش مهمی در درک و مدل‌سازی جهان طبیعی و پدیده‌های پیچیده دارند. از ریاضیات تا هنر و از فیزیک تا اقتصاد، کاربردهای متنوع فراکتال‌ها نشان‌دهنده اهمیت و تأثیرگذاری آن‌ها در زمینه مختلف زندگی انسان دارند.

پژوهش‌های آینده در حوزه فراکتال‌ها می‌تواند به کشف کاربردهای جدید و بهبود روش‌های فعلی منجر گردد.

* پی‌نوشت

1. Benoit mandelbrot

منابع

1. Mandelbrot, B. B. (2020). *The Fractal Geometry of Nature*. Yale University Press.
2. Falconer, K. (2019). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons.
3. Smith, T. (2021). "Fractals in Nature: Patterns and Applications," *Journal of Natural Science*.

در معماری، استفاده از الگوهای فراکتالی به طراحان امکان می‌دهد که علاوه بر ایجاد جذابیت بیشتر به توزیع بهتر وزن و بهبود مقاومت سازه‌ها در برابر نیروی طبیعی مانند زلزله کمک کنند. به‌علاوه استفاده از فراکتال‌ها می‌تواند به کاهش مصرف انرژی و بهینه‌سازی جریان هوا در ساختمان‌ها منجر شود.

طراحی آنتن‌های فراکتالی

آنتن‌های فراکتالی به دلیل توانایی کار در باندهای فرکانسی مختلف و بهره‌وری بالا، در صنایع مخابراتی استفاده می‌شود. این آنتن‌ها، به‌دلیل ساختار فراکتالی خود، می‌توانند در فرکانس‌های متعدد به خوبی عمل کنند و این امر باعث افزایش کارایی و کاهش هزینه‌های ساخت می‌شود. طراحی این آنتن‌ها مبتنی بر الگوهای فراکتالی به آن‌ها امکان می‌دهد که کوچکتر، سبک‌تر و کارآمدتر شود.

الگوهای فراکتالی در بهبود کیفیت سیگنال‌ها و کاهش نویز در ارتباطات بی‌سیم مؤثر هستند. استفاده از طراحی‌های فراکتالی در سیستم‌های مخابراتی می‌تواند به افزایش پوشش‌دهی و کیفیت سیگنال‌های ارتباطی کمک کند.



آنتن تک‌قطبی فراکتالی

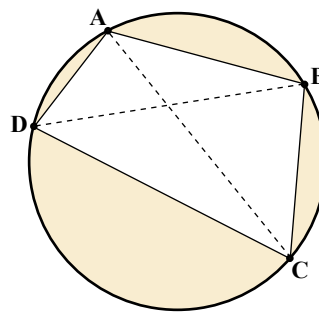
تحلیل بازارهای مالی و پیش‌بینی روندها:

در بازارهای مالی، از فراکتال‌ها برای تحلیل نوسانات قیمت ارز و سهام‌ها استفاده می‌شود. این مدل‌ها به تحلیل‌گران کمک می‌کنند تا الگوهای پیچیده تغییرات قیمت را شناسایی و روندهای آینده را پیش‌بینی کنند. تحلیل‌های فراکتالی هم‌چنین به درک رفتارهای بازاری که در مقیاس‌های مختلف مشابه هستند، کمک می‌کنند.

معرفی

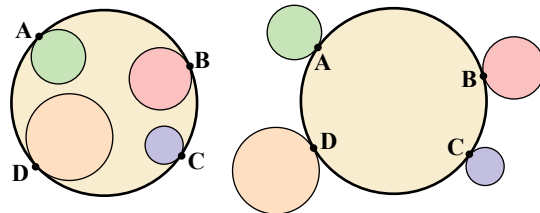
قضیه کیسی
(Casey)

در مورد رابطه طولی بین اندازه‌های اضلاع و اندازه اقطار در چهارضلعی محاطی، قضیه معروف بطلیموس را داریم که در آن قید می‌شود:



$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD (*)$$

جان کیسی (John Casey) ریاضیدان ایرلندی، در رأس‌های چهارضلعی محاطی ABCD دوایری رسم می‌کند که در همان نقاط همگی مماس داخل (خارج) بر دایره محیطی آن چهارضلعی باشد مانند دو شکل زیر:

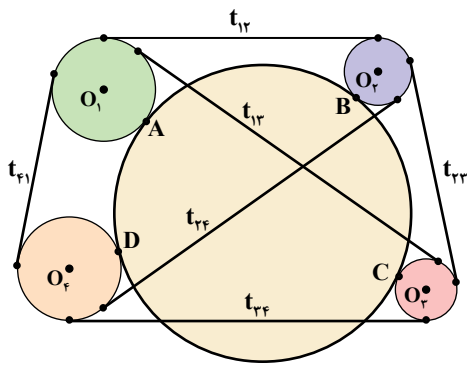


جان کیسی، قضیه بطلیموس را که حکایت از رابطه بین اندازه اضلاع و اندازه اقطار را داشت (همان رابطه *)، تعمیم داد به وجود رابطه بین اندازه مماس مشترک‌های خارجی بین دوایر و سپس

برقراری تساوی زیر را عنوان کرد:

$$t_{12} \times t_{34} + t_{23} \times t_{41} = t_{13} \times t_{24}$$

که در آن منظور از t_{ij} ، اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به مرکزهای i و j می‌باشد. مانند شکل زیر:

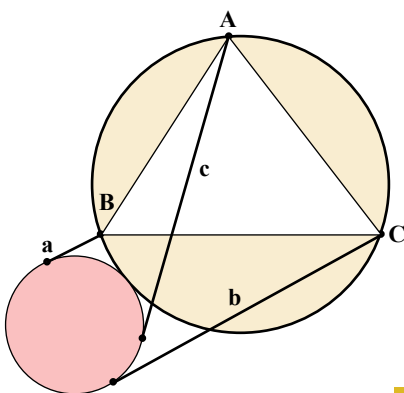


تذکر: اگر چهار دایره، مماس داخل با دایره محیطی باشند، رابطه قید شده در مورد اندازه مماس مشترک‌های خارجی هم‌چنان برقرار خواهد بود.

قبل از آنکه به اثبات قضیه کیسی بپردازیم، دو مثال زیر را بیان و حل می‌کنیم.

مثال ۱

در صورتیکه بدانیم مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع است. ثابت کنید با سه پاره‌خط به اندازه‌های a ، b و c نمی‌توان یک مثلث ساخت.



حل:

طبق قضیه کیسی داریم:

$$AB \cdot b + AC \cdot a = BC \cdot c$$

چون $AB = BC = CA$ در نتیجه: $a + b = c$ که با توجه

و به همین ترتیب داریم:

$$BC = \frac{R \times t_{r_3}}{\sqrt{R+r_3} \times \sqrt{R+r_4}}$$

و

$$CD = \frac{R \times t_{r_4}}{\sqrt{R+r_3} \times \sqrt{R+r_4}}$$

و

$$AC = \frac{R \times t_{r_1}}{\sqrt{R+r_1} \times \sqrt{R+r_3}}$$

و

$$BD = \frac{R \times t_{r_4}}{\sqrt{R+r_3} \times \sqrt{R+r_4}}$$

و

$$DA = \frac{R \times t_{r_1}}{\sqrt{R+r_3} \times \sqrt{R+r_4}}$$

اکنون با قراردادن معادل‌های فوق در رابطه (*) از قضیه

بطلمیوس داریم:

$$AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$$

$$\Rightarrow t_{r_1} \times t_{r_4} + t_{r_3} \times t_{r_4} = t_{r_1} \times t_{r_4}$$

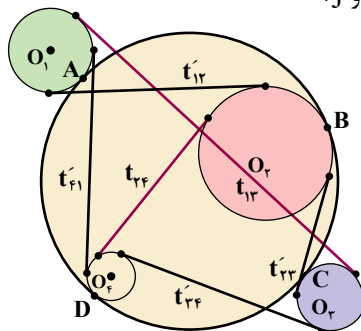
تذکر: اگر چهار دایره بر دایره محیطی ABCD مماس داخل باشند. مشابه روابط فوق عمل می‌کنیم.

تمرین

با توجه به شکل زیر ثابت کنید:

$$t'_{r_1} \times t'_{r_4} + t'_{r_3} \times t'_{r_1} = t_{r_1} \times t_{r_4}$$

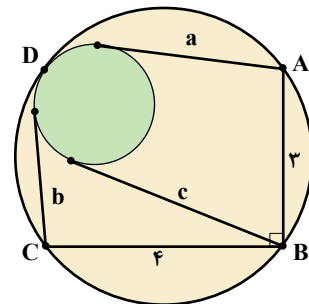
که در آن t_{r_i} اندازه مماس مشترک خارجی بین دو دایره با مرکزهای i و j و t'_{r_i} اندازه مماس مشترک داخلی بین دو دایره با مرکزهای i و j .



به اصل نامساوی مثلثی، نمی‌توان با سه پاره‌خط به اندازه‌های a, b, c و c یک مثلث ساخت.

مثال ۲

معینی کنید در شکل روبه‌رو، چه رابطه‌ای بین اندازه سه قطعه مماس وجود دارد؟



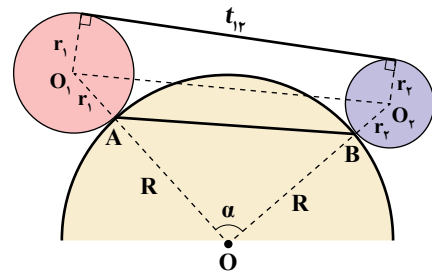
$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$a \times 4 + b \times 3 = c \times AC$$

$$\Rightarrow 4a + 3b = 5c$$

اثبات قضیه کیسی:

در حالتی که چهار دایره بر دایره محیطی ABCD مماس خارج هستند، اثبات را ارائه می‌دهیم:



$$t_{r_1} \Rightarrow (t_{r_1})^2 = (O_1 O_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$\Delta O_1 O_2 \Rightarrow (O_1 O_2)^2 = (R + r_1)^2 +$$

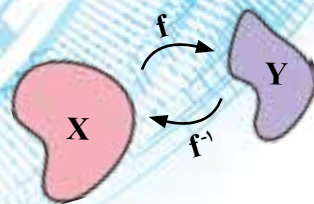
$$(R + r_2)^2 - 2(R + r_1)(R + r_2) \cos \alpha$$

$$\Delta OAB \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2R^2 - AB^2}{2R^2}$$

از سه تساوی فوق نتیجه می‌گیریم:

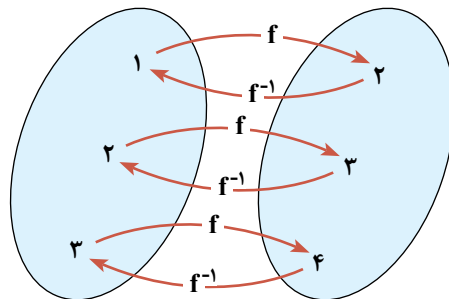
$$AB = \frac{R \times t_{r_1}}{\sqrt{R+r_1} \times \sqrt{R+r_2}}$$

در حاشیه تابع



■ تابع معکوس و معکوس تابع

فرض کنید روی مجموعه $\{A = \{1, 2, 3\}\}$ تابع f با ضابطه $f(x) = x + 1$ تعریف شده باشد و داشته باشیم $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ اگر وارون f یعنی f^{-1} را تشکیل دهیم، خواهیم داشت $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ اگر نمودار پیکانی این دو رابطه را رسم کرده، با هم مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود که این دو رابطه اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی هر عضوی را که f از مجموعه اول به مجموعه دوم منتقل می‌کند f^{-1} ، آن عضو را به جای قبلی خود برمی‌گرداند.



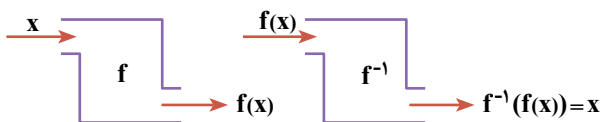
$$f(1) = 2, f^{-1}(2) = 1$$

$$f(2) = 3, f^{-1}(3) = 2$$

$$f(3) = 4, f^{-1}(4) = 3$$

همانطور که ملاحظه می‌شود همواره، $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$.

این مطلب را می‌توان به صورت زیر نیز توجیه کرد که اگر f و f^{-1} را در حکم دو ماشین تابع در نظر بگیریم، همواره ورودی تابع f ، x ها بوده و خروجی آن $f(x)$ و ورودی تابع f^{-1} ، $f(x)$ ها هستند و خروجی f^{-1} ، x ها می‌باشند.



در حالت کلی اگر $f(x) = y$ ، در این صورت $f^{-1}(y) = x$ و برعکس، حال با توجه به تابع f که در ابتدای این مبحث به آن اشاره شد یعنی $f(x) = x + 1$ و این که تابع f روی اعضای دامنه به این شکل اثر می‌کند، که ۱ واحد به آن‌ها اضافه می‌کند، می‌خواهیم ضابطه f^{-1} را بیابیم، بدیهی است که اگر $y = x + 1$ ، ضابطه f باشد (ضابطه f بر حسب x است) کافی است x را بر حسب y بیابیم. یعنی $x = y - 1$ که این ضابطه، ضابطه f^{-1} است، یعنی $f^{-1}(y) = y - 1$ ، اگر در حالت کلی f^{-1} را بر حسب x یا z بیان کنیم به ترتیب خواهیم داشت، $f^{-1}(x) = x - 1$ و $f^{-1}(z) = z - 1$.

بنابراین اگر بتوانیم ضابطه f^{-1} را از روی ضابطه f به دست آوریم، در این حالت و با توجه به تعریف ترکیب توابع می‌توانیم تابع معکوس را به صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف: تابع‌های f و g معکوس یکدیگرند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, D_g \text{ از } x \text{ به ازای}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, D_f \text{ از } x \text{ به ازای}$$

در این صورت g را با f^{-1} و f را با g^{-1} نمایش می‌دهند.

مثال

نشان دهید که دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ وارون یکدیگرند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1$$

$$= (x-1) + 1 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - 1$$

$$= \sqrt[3]{x^3} = x$$

پس طبق تعریف دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

شاید این مطلب در ذهن ایجاد شود که چون $f(g(x)) = x$ و $g(f(x)) = x$ باید $f \circ g = g \circ f$ باشد اما این مطلب در حالت کلی صحیح نمی‌باشد و برای روشن شدن مطلب f و g را به صورت مجموعه‌هایی از زوج‌های مرتب و وارون یکدیگر در نظر می‌گیریم، توجه کنید!

$$f = \{(2, 3), (3, 4), (1, 5)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1} = g = \{(3, 2), (4, 3), (5, 1)\}$$

$$f \circ g = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

$$g \circ f = \{(2, 2), (3, 3), (1, 1)\}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید $f \circ g$ و $g \circ f$ هر دو تابع‌های همانی هستند ولی $f \circ g \neq g \circ f$ می‌باشد.

نامی که در ابتدای این بحث به کار بردیم، تابع معکوس و معکوس تابع بود. اکنون این سؤال پیش می‌آید که، آیا همواره اگر f یک تابع باشد، f^{-1} نیز تابع است یا خیر؟

مثلاً اگر $f = \{(2, 3), (3, 4)\}$ واضح است که f طبق تعریف تابع، یک تابع است و $f^{-1} = \{(3, 2), (4, 3)\}$ نیز تابع است که در این حالت f^{-1} را تابع معکوس f نامیده و اصطلاحاً می‌گوییم تابع معکوس پذیر است. اما اگر فرض کنیم $f = \{(2, 3), (3, 3)\}$ ، f تابع است ولی $f^{-1} = \{(3, 2), (3, 3)\}$ (با توجه به تعریف تابع) تابع نمی‌باشد، که در این حالت f^{-1} را فقط می‌توان معکوس f نامیده و می‌گوییم f معکوس پذیر نیست.

اگر کمی دقت کنید، مشاهده می‌کنید در این مثال، f تابع است ولی یک به یک نیست. یعنی زوج مرتب‌های آن دارای مؤلفه‌های دوم برابر هستند و همین امر باعث می‌شود در f^{-1} زوج مرتب‌هایی با مؤلفه‌های اول برابر تولید شوند که تابع بودن f^{-1} را نقض می‌کند و اگر چنین زوج مرتب‌هایی (با مؤلفه‌های دوم برابر) در f یافت نشود، در f^{-1} نیز زوج مرتب‌هایی با مؤلفه‌های اول برابر یافت نخواهد شد و f^{-1} تابع می‌شود. پس معکوس پذیر بودن تابع f را به صورت زیر به شکل قضیه‌ای می‌توان بیان کرد:

❖ **قضیه:** تابع f معکوس پذیر است، اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

مثال

ثابت کنید تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ معکوس پذیر است و ضابطه تابع معکوس آن را بیابید.

برای اثبات معکوس پذیری تابع طبق قضیه کافی است ثابت کنیم تابع f یک به یک است پس:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1+2} = \frac{2x_2-1}{x_2+2}$$

$$\Rightarrow \cancel{2x_1x_2} + 4x_1 - x_2 - \cancel{2} = \cancel{2x_1x_2} + 4x_2 - x_1 - \cancel{2}$$

$$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ تابع } f \text{ یک به یک است.}$$

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = 2x - 1 \text{ فرض کنیم}$$

$$\Rightarrow xy - 2x = -2y - 1 \Rightarrow x(y-2) = -2y-1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2y-1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{-2y-1}{y-2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2} \text{ (ضابطه } f^{-1} \text{ بر حسب } x)$$

$$\begin{aligned}
 y = 2x + 1 &\Rightarrow x = \frac{1}{2}(y - 1) \\
 \Rightarrow g^{-1}(x) &= \frac{1}{2}(x - 1) \\
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (2x + 1) - 1 = 2x \\
 \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) &= \frac{x}{2} \quad (1) \\
 (g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\
 &= \frac{1}{2}[(x + 1) - 1] = \frac{1}{2}x \quad (2) \\
 (1), (2) &\Rightarrow (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}
 \end{aligned}$$

🌟 **تذکر مهم:** مطلبی که در مثال قبل تحقیق شده، تصادفی نبوده و در حالت کلی نیز برقرار بوده و می‌توان آن را به صورت قضیه زیر بیان کرد:

🔴 **قضیه:** اگر f و g دو تابع معکوس‌پذیر باشند همواره،
 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

🔴 **نتیجه مهم:** این قضیه را می‌توان به صورت بسیار مناسبی در محاسبه وارون تابع‌هایی که بتوان آن‌ها را به شکل ترکیب چند تابع نوشت، به کار برد.

➤ مثال

وارون تابع با ضابطه $h(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^4$ را به دست آورید. قبل از محاسبه وارون f ، ابتدا متذکر می‌شویم که قضیه قبل قابل تعمیم است، یعنی برای سه تابع f و g و h و حتی بیشتر نیز می‌توان قضیه را به کار برد مثلاً برای سه تابع f و g و h داریم:

$$(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$$

حال اگر قرار دهیم $f(x) = x + 3$ و $g(x) = x^4$ و $k(x) = \frac{1}{3}x$ واضح است که

$$k^{-1}(x) = 3x, g^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}, f^{-1}(x) = x - 3$$

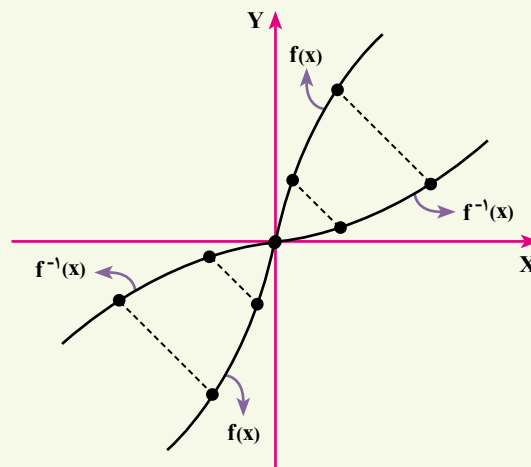
$$h(x) = (k \circ g \circ f)(x)$$

$$g(f(x)) = (x + 3)^4 \text{ و}$$

$$\text{زیرا } (k \circ g \circ f)(x) = k(g(f(x)))$$

$$\Rightarrow k(g(f(x))) = \frac{1}{3}(x + 3)^4$$

🌟 **تذکر مهم:** می‌خواهیم از نظر نموداری، وضعیت یک تابع معکوس‌پذیر و معکوس آن را بررسی کنیم، اولاً چون f معکوس‌پذیر است پس طبق قضیه یک‌به‌یک است و لذا خطی موازی با محور x ‌ها نمی‌تواند نمودار f را در پیش از یک نقطه قطع کند، از طرفی اگر $(a, b) \in f$ یا $f(a) = b$ با توجه به تعریف f^{-1} واضح است که $f^{-1}(b) = a$ یا $(b, a) \in f^{-1}$ دو نقطه (a, b) و (b, a) نسبت به خط $y = x$ تقارن دارند به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قریبۀ محوری یکدیگرند. پس به راحتی با در اختیار داشتن نمودار تابع f و توجه به مطلب فوق به راحتی می‌توان به نمودار f^{-1} دست پیدا کرد. در شکل زیر این مطلب مشاهده می‌شود:



➤ مثال

فرض کنید $f(x) = x - 1$ و $g(x) = 2x + 1$ در این صورت هر یک از تابع‌های f^{-1} و g^{-1} و $(f \circ g)^{-1}$ و $g^{-1} \circ f^{-1}$ را محاسبه کرده و رابطه $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ را تحقیق کنید. چون f و g هر دو تابع‌های یک‌به‌یک هستند لذا معکوس‌پذیر بوده و داریم:

$$y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 1$$

$$\begin{aligned}
 h^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1} \circ k^{-1})(x) \\
 &= f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ k^{-1})(x)) \\
 &= h^{-1}(x) = f^{-1} \circ (g^{-1}(k^{-1}(x))) \cdot g^{-1}(k^{-1}(x)) \\
 &= \sqrt[3]{3x} \Rightarrow h^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt[3]{3x}) = (\sqrt[3]{3x}) - 3
 \end{aligned}$$

تمرین

۱. تابع f به معادله $f(x) = x^2 - 2x + 3$ در کدام یک از فاصله‌های زیر معکوس پذیر است.

- الف) $(-\infty, 1)$ ب) $(-\infty, 1)$
ج) $(1, +\infty)$ د) $[1, +\infty)$

۲. ثابت کنید تابع f به معادله $f(x) = 2\sqrt{x-2} + x$ معکوس پذیر بوده و ضابطه f^{-1} را بر حسب x بیابید.

۳. ثابت کنید تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ معکوس پذیر بوده و ضابطه f^{-1} را بیابید.

۴. اگر $h(g) = 4(x-1)^3$ در این صورت ضابطه h^{-1} بیابید.

۵. اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 2, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$ در این صورت $f^{-1}(x)$ را بیابید.

۶. هر یک از حالت‌های زیر را بررسی کنید که آیا دو تابع داده شده f و g ، وارون یکدیگرند یا خیر؟

الف) $f(x) = 2x^3 - 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{\frac{2y+1}{3}}$

ب) $f(x) = 2x + 5$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x - 5)$

ج) $f(x) = x^5 + 1$ و $g(x) = \sqrt[5]{x-1}$

د) $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \arcsin x$

هـ) $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \cot g(x)$

۷. کدام یک از تابع‌های زیر معکوس پذیر می‌باشند؟

الف) $f(x) = x^2 + x$

ب) $f(x) = x^2 - x$ ($x \geq 0$ هر)

ج) $f(x) = 2x^3 - 4$

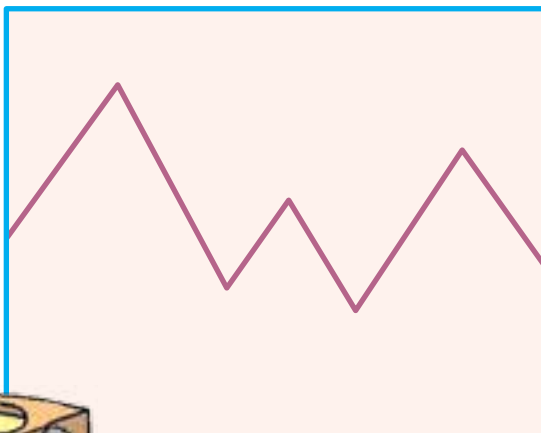
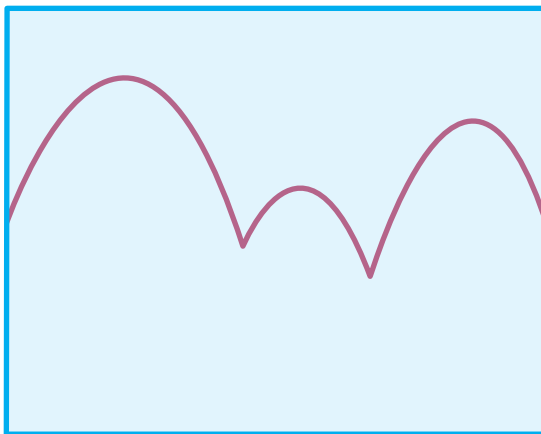
د) $f(x) = \frac{4-x}{3x+2}$

هـ) $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$ ($x \geq 0$ هر)

و) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

۸. ثابت کنیم که اگر تابع f ، زوج باشد، معکوس پذیر نیست.

۹. ثابت کنید تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ با معکوس خود برابر است.





بررسی تست‌های گسسته و آمار کنکور

اشاره:

به‌نام خداوند جان و خرد

از شماره قبلی مجله قرار گذاشتیم که در هر شماره یکی از درس‌های کنکور ۱۴۰۳ را مورد بررسی قرار دهیم تا انشاءالله روز کنکور تمام دروس ریاضی کنکور ۱۴۰۳ را بررسی کرده باشیم بنابر قولی که داده بودیم امروز نوبت به درس آمار و احتمال و گسسته رسیده است. در این کنکور سؤالات درس آمار و احتمال بسیار منطقی و در سطح کتاب درسی بود. اگر دانش‌آموزی تمرین‌های کتاب درسی را مورد بررسی قرار داده بود حتماً همه تمرینات این آزمون را پاسخگو بود. در این جا تمرینات این آزمون با شاهد و مثال کتاب درسی خواهیم آورد فقط شماره سؤالات را رعایت نکرده‌ایم. ابتدا به کار در کلاس‌های زیر از کتاب درسی توجه کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$

مثال

ارزش گزاره‌های شرطی زیر را تعیین کنید:

الف: $(p \Rightarrow p \vee q) = T$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د			
د			
ن			
ن			

کار در کلاس:

۱. با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \vee q$ هم ارزش منطقی‌اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د		
د	ن	ن		
ن	ن	د		
ن	د	د		

۲. گزاره $(p \Rightarrow q)$ عکس ترکیب شرطی $(q \Rightarrow p)$ و

$(\sim q \Rightarrow \sim p)$ گزاره $p \Rightarrow q$ عکس نقیص ترکیبی شرطی $p \Rightarrow q$ است.

با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیص خود هم‌ارز است.

پ: $(p \wedge q \Rightarrow p) = T$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

اکنون تست کنکور و حل آن را ملاحظه کنید.

۲. اگر p گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

T (۲) r (۱)

$\sim T$ (۴) $\sim r$ (۳)

$$(\sim p \vee r) \vee (\sim r \vee q) \equiv (p \wedge \sim r) \vee (\sim r \vee q) \\ \equiv (T \wedge \sim r) \vee (\sim r \vee F) \equiv \sim r \vee \sim r \equiv \sim r$$

در سؤال بعدی کافی است که ما تعریف ضرب و دکارتی و احتمال شرطی بدانیم که به راحتی مسأله را حل کنیم کار در کلاس زیر را ملاحظه کنید.

کار در کلاس:

فرض کنید تاسی را در دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف: فضای نمونه این آزمایش چند عضوی است؟ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟

پ: می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال این که دست کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

مثال

دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می‌کنیم.

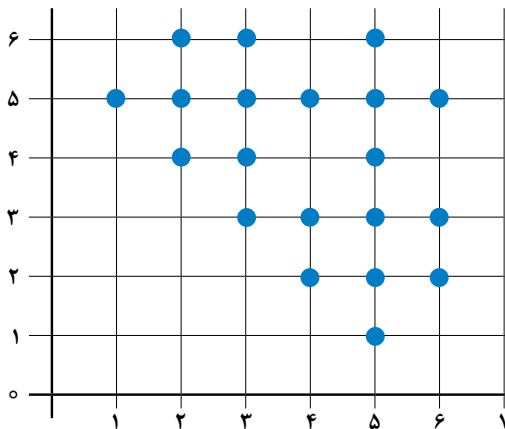
الف: اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

پ: اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال این که مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

اکنون سؤال کنکور، حل آن را ملاحظه کنید:

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شده یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آن‌ها حداقل ۶ است؟

$$\frac{2}{9} \quad (۱) \quad \frac{5}{9} \quad (۲) \\ \frac{11}{18} \quad (۳) \quad \frac{13}{18} \quad (۴)$$



$n(A) = 20$ و $n(S) = 36$ نقاط روی صفحه مختصات

$$P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

در حل تست بعدی کافی است حواسمان باشد که اگر میانگین داده‌ها عوض نشود واریانس هم عوض نخواهد شد و مسأله حل است.

اکنون سؤال کنکور

میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به طوری که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر $1/25$ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

$$\frac{1}{25} \quad (۱) \quad \frac{2}{5} \quad (۲) \\ \frac{3}{25} \quad (۳) \quad \frac{4}{5} \quad (۴)$$

چون میانگین تغییر نکرده پس داده منتقل شده برابر میانگین بوده لذا واریانس تغییر نمی‌کند.

❶ حالا به بررسی گسسته‌ها رسیدیم:

تست بعدی، تقریباً تست سختی است که البته باید کمی ذهنیت ریاضی داشته باشی نمی توان آن را به بخش یا صفحه خاصی از گسسته نسبت داد.

در هر حال آن را با هم ملاحظه کنیم. برای حل آن شاید در نظر گرفتن همه حالت‌ها برای n را باید در نظر بگیریم عددها را با توجه صورت مسأله بسازیم تا به جواب برسیم.

❧ یک عدد پنج رقمی با استفاده از دو عدد متوالی کمتر از 10 نوشته است. اگر مجموع ارقام آن عدد به صورت $23n + 1$ باشد، چند عدد پنج رقمی با این ویژگی وجود دارد؟

$$\begin{array}{ll} 1 & (1) \\ 2 & (2) \\ 3 & (3) \\ 4 & (4) \\ 5 & (5) \\ 6 & (6) \end{array}$$

$$a = 23n + 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \Rightarrow 23 \times 0 + 1 = 1 \Rightarrow a = 10000 \\ n = 1 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 24 \Rightarrow \begin{cases} a = 55554 \\ a = 55545 \\ a = 55455 \\ a = 54555 \\ a = 45555 \end{cases} \\ n = 2 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 48 \Rightarrow \text{امکان پذیر نیست} \end{cases}$$

تست بعدی در نگاه اول مربوط به تعریف ب.م.م است که البته در کتاب‌های درسی نظام قدیم آمده بود اما با توجه به مفهوم مسأله می توان دریافت که باید r و s را طوری پیدا کنیم که کوچکترین عضو مجموعه با تعریف داده شده را بیابیم.

❧ اگر m کوچکترین عضو مثبت مجموعه $\{407r + 592s \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$ باشد، مجموع ارقام m کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 2 & (1) \\ 7 & (2) \\ 10 & (3) \\ 11 & (4) \end{array}$$

$$37 \times 11r + 37 \times 16s = 37(11r + 16s) \xrightarrow{\text{کوچکترین عضو مثبت}} r=3, s=-2$$

$$37(33 - 32) = 37 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 3 + 7 = 10$$

راه دوم می توان از مفهوم کتاب گذشته استفاده کرد.

کوچکترین عضو بزرگترین مقسوم علیه مشترک 407 و 592 می باشد.

$$(407, 592) = (11 \times 37, 2^4 \times 37) = 37 \Rightarrow 3 + 7 = 10$$

سؤال بعدی از تمرینات بسیار آشنای کتاب درسی است شاید هر معلمی با هر نوع توانایی چندین تمرین مشابه آن را در کلاس‌های درسی حل می کند و جز خوشایندترین بحث‌های احتمال برای هر دانش آموز است به دو نمونه زیر توجه کنید.

❶ ملاحظه کنید:

❧ 50% درصد واجدین شرایط در شهر A و 80% درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف و بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

❧ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوان‌های یک مؤسسه انتشاراتی‌اند که به ترتیب، 20% ، 30% و 50% درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آن‌ها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به ترتیب $9/10$ ، $95/100$ و $99/100$ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

و چندین مثال دیگر همگی از قضیه بیز هستند حالا تست و حل آن را ببینید.

❧ دانش‌آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. 60% درصد از دانش‌آموزان مدرسه A و 70% درصد از دانش‌آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان مدرسه A ، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش‌آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول‌شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از مدرسه A است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{9}{16} & (1) \\ \frac{7}{16} & (2) \\ \frac{5}{8} & (3) \\ \frac{3}{8} & (4) \end{array}$$

$$n(A) = \frac{3}{4} n(B) \Rightarrow (A) = \frac{3}{5}, P(n) = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\frac{3}{5} \times 1/8}{\frac{3}{5} \times 0/6 + \frac{2}{5} \times 0/7} = \frac{1/8}{1/8 + 1/4} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{9}{36} = \frac{9}{16}$$

در گراف G $|V(G)| = 8$ و $|E(G)| = 24$ است. کمترین مقدار ممکن برای $\delta(G)$ کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) |
| ۳ (۳) | ۴ (۴) |

اگر گراف کامل بود تعداد یال‌های گراف مرتبه ۸ برابر می‌شد با:

$$\text{تعداد یال‌های گراف کامل} = \frac{8 \times (8-1)}{2} = 28$$

گراف مطلوب مسأله ۴ یال از گراف کامل کمتر دارد. برای اینکه رأسی با کمترین درجه داشته باشیم باید هر ۴ یال از یکی از رأس‌ها کم شود. یعنی $\delta(G) = 7 - 4 = 3$.

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتبط شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

حداقل چند عدد از مجموعه $\{3, 4, \dots, 9, 12, 13, \dots, 20\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل دو عدد از آنها دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر یک هستند؟

- | | |
|-------|-------|
| ۹ (۱) | ۸ (۲) |
| ۷ (۳) | ۶ (۴) |

مقسوم علیه مشترک غیر از یک یعنی عدد مورد نظر فقط به خودش و یک بخش‌پذیر باشد. یعنی عدد مورد نظر اول باشد.

$$7 = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} = \text{اعداد اول} = \text{تعداد لانه‌ها}$$

حالا با برداشتن عدد هشتم دیگه مطمئن خواهیم شد که حداقل دو عدد دارای مقسوم‌الیه مشترک غیر از یک خواهند بود.

برایتان آرزوی پیروزی می‌کنیم تا بعد ...



📌 به مفاهیم زیر دقت کنید:

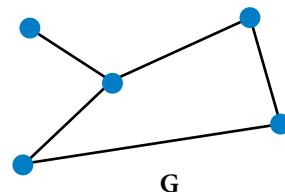
مجموعه همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم $v \in V(G)$ به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خود رأس v به $N_G[v]$ همسایگی بسته رأس v را به دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v) = \{v \in V(G) : v \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رؤس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آنها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم:

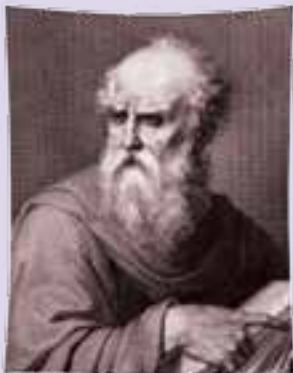
$$\Delta(G) = 3, \delta(G) = 0$$



شکل ۱۳



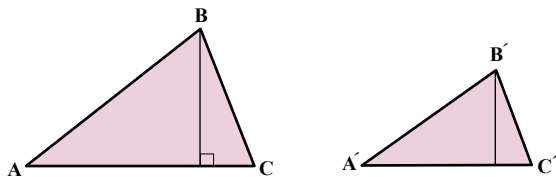
نسبت مساحت‌های چندضلعی‌های متشابه



مقدمه: در زندگی واقعی، هندسه^۱ کاربردهای زیادی دارد، از ساده‌ترین تا پیچیده‌ترین پدیده‌های زندگی ما، هندسه بویژه در پروژه‌های مختلف ساخت و ساز و مهندسی نقش حیاتی دارد. به گفته معمار رومی باستان مارکوس ویتروویوس^۲ در کتاب مشهورش «در مورد معماری^۳»، «بدون تقارن^۴ و تناسب^۵، هیچ معبدی نمی‌تواند نقشه منظمی داشته باشد.

مسائلی که شامل مساحت‌های^۶ چندضلعی‌های متشابه^۷ هستند. معمولاً در کاربردهای معماری رخ می‌دهند. قضیه نسبت مساحت‌های چندضلعی‌های متشابه ابزاری قدرتمند و مفید در ساده‌سازی راه‌حل‌های بسیاری از مسائل هندسی است که شامل چندضلعی‌های متشابه می‌شود. این قضیه مساحت‌های چندضلعی‌های متشابه را با اندازه اجزاء خطی متناظر^۸ آن‌ها مرتبط می‌کند.

متناظر این مثلث‌ها را با X نمایش دهیم:



$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a'h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = x \cdot x = x^2$$

حال دو n ضلعی متشابه را در نظر بگیرید. هر یک از آن‌ها را می‌توان به $n - 2$ مثلث متشابه تقسیم کرد. این کار را با رسم قطرهای از رأس‌های متناظر انجام می‌دهیم.

➡ **قضیه:** نسبت مساحت‌های دو چندضلعی متشابه برابر با مربع نسبت اندازه اجزاء خطی متناظر آن‌ها است.

● **اثبات:** این قضیه را می‌توان به روش استقرای^۹ اثبات کرد. در ابتدا، زوج مثلث^{۱۰}‌های متشابه ABC و A'B'C' را در نظر می‌گیریم. مساحت ABC برابر $S = \frac{1}{2}ah$ و مساحت مثلث A'B'C' برابر $S' = \frac{1}{2}a'h'$ است. که در آن a، h، a' و h' به ترتیب قاعده‌ها^{۱۱} و ارتفاع‌های^{۱۲} متناظر در مثلث‌های ABC و A'B'C' هستند. از آنجا که مثلث‌ها متشابه هستند، نسبت اندازه اجزاء خطی آن‌ها (اضلاع متناظر، ارتفاع‌ها و غیره) همواره یکسان خواهد بود. اگر نسبت اندازه اجزاء خطی



حل:

با توجه به شرایط مسأله می‌دانیم که $OF \parallel AB$ و $NE \parallel AC$ و $KP \parallel BC$ هستند.

بنابراین طبق برابری دو زاویه مثلث‌های $\triangle MFE$ ، $\triangle NKM$ و $\triangle OMP$ متشابه‌اند و هر سه متشابه با $\triangle ABC$ هستند. مساحت مثلث ABC را S ، مساحت مثلث NKM را S_1 و مساحت MFE را S_2 و مساحت مثلث OMP را S_3 نمایش می‌دهیم. همچنین $MN = x$ و $ME = y$ و $OP = z$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه نسبت مساحت‌های چندضلعی‌های متشابه داریم:

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{x}{AC} \quad \text{برای } \triangle NKM \text{ و } \triangle ABC$$

$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{y}{AC} \quad \text{برای } \triangle MFE \text{ و } \triangle ABC$$

$$\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{z}{AC} \quad \text{برای } \triangle OMP \text{ و } \triangle ABC$$

با جمع این سه رابطه:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{x + y + z}{AC} \quad (1)$$

توجه داشته باشید که چهارضلعی‌های $MECP$ و $MKBF$ و $MOAN$ متوازی‌الاضلاع^{۱۴} هستند.

زیرا اضلاع روبه‌رو، دوه‌دو موازی‌اند. بنابراین $ME = PC = y$ و $NM = AO = x$ بنابراین:

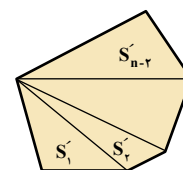
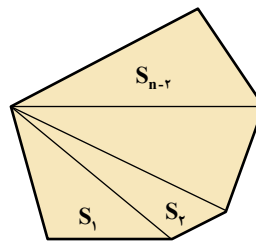
$$x + y + z = AO + OP + PC = AC$$

با جایگذاری این مقدار در (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$



برای تسهیل درک استدلال زیر، ابتدا به مجموع مساحت‌های دو مثلث متشابه توجه می‌کنیم:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(a_1 h_1 + a_2 h_2) \\ = \frac{x^2}{2}(a'_1 h'_1 + a'_2 h'_2) = x^2(s'_1 + s'_2)$$

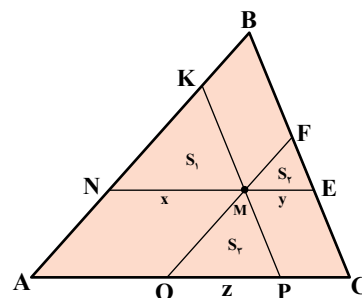
سپس فرض کنید که برای $n = k - 1$ قبلاً اثبات شده است، حال ثابت می‌کنیم برای $n = k$ درست است. با استفاده از فرض^{۱۳} استقراء:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_{k-2} \\ = (S_1 + S_2 + \dots + S_{k-3}) + S_{k-2} \\ = x^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-3} S'_i + x^2 \cdot S'_{k-2} \\ = x^2 \left(\sum_{i=1}^{k-3} S'_i + S'_{k-2} \right) = x^2 \cdot S'$$

که در آن S'_i ($i = 1, 2, \dots, k-2$) و S_i ($i = 1, 2, \dots, k-2$) نشان‌دهنده مساحت‌های مثلث‌های متشابه متناظر هستند که هر n -ضلعی به آن‌ها تقسیم شده است. اثبات کامل شد. حال کاربرد این قضیه را در حل چند مسأله نشان می‌دهیم.

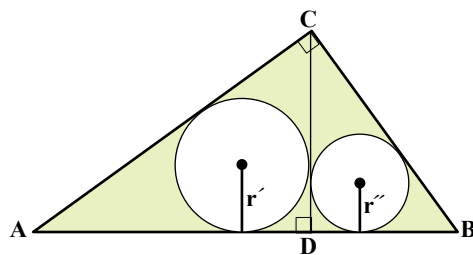
مسأله ۱. سه خط موازی با اضلاع مثلث ABC از نقطه M

که درون مثلث قرار دارد، رسم شده است. این خطوط مثلث ABC را به شش بخش تقسیم می‌کنند که سه بخش از آن‌ها مثلث‌هایی با مساحت S_1 ، S_2 ، S_3 هستند. مساحت مثلث ABC را بیابید.



مسئله ۲. CD ارتفاعی در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ است.

$(\hat{C} = 90^\circ)$ و r' و r'' به ترتیب شعاع دایره‌های محاطی $\triangle ABC$ و $\triangle ADC$ و $\triangle BDC$ هستند. شعاع دایره محاطی در مثلث $\triangle ABC$ را پیدا کنید.



حل:

نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم این است که همیشه این انتخاب به ما بستگی دارد که اندازه کدامین اجزاء خطی از مثلث‌های متشابه را برای بهترین کاربرد قضیه نسبت‌های مساحت‌های چندضلعی متشابه انتخاب کنیم. در این مسئله ما با شعاع‌های دایره‌های محاطی در مثلث‌های متشابه کار خواهیم کرد. مثلث‌های قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ و $\triangle ADC$ و $\triangle BDC$ متشابه هستند، زیرا این مثلث‌ها به ترتیب یک زاویه مشترک A و یک زاویه مشترک B دارند.

مساحت مثلث $\triangle ABC$ را با S ، مساحت مثلث $\triangle ADC$ را با S' و مساحت مثلث $\triangle BDC$ را با S'' و شعاع دایره محاطی مثلث $\triangle ABC$ را با r نمایش می‌دهیم. حال روابط زیر را داریم:

$$\frac{S'}{S} = \frac{r'^2}{r^2} \quad \text{برای دو مثلث متشابه } \triangle ABC \text{ و } \triangle ADC :$$

$$\frac{S''}{S} = \frac{r''^2}{r^2} \quad \text{برای دو مثلث متشابه } \triangle ABC \text{ و } \triangle BDC :$$

$$\frac{S' + S''}{S} = \frac{r'^2 + r''^2}{r^2} \quad \text{با جمع کردن این دو رابطه داریم:}$$

$$1 = \frac{r'^2 + r''^2}{r^2} \quad \text{از آنجا که } S' + S'' = S \text{ لذا:}$$

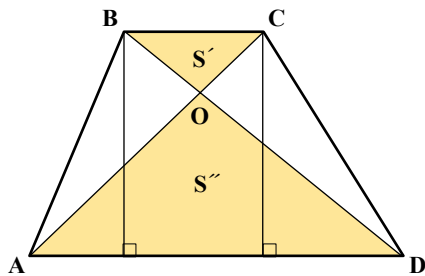
$$r^2 = r'^2 + r''^2$$

و در نهایت داریم:

و تمام.

مسئله ۳. در دوزنقه $ABCD$ ($BC \parallel AD$)، O نقطه تقاطع قطرهای آن است. مساحت مثلث $\triangle BOC$ برابر S' و مساحت

مثلث $\triangle AOD$ برابر S'' است. مساحت دوزنقه $ABCD$ را پیدا کنید.



حل:

در ابتدا نکته مهمی را پیش از حل مسئله ذکر می‌کنیم: در دوزنقه $ABCD$ ($BC \parallel AD$) مساحت مثلث‌های $\triangle ABO$ و $\triangle COD$ برابر است زیرا:

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} \Rightarrow S_{\triangle ABO} + S_{\triangle OAD} = S_{\triangle COD} + S_{\triangle OAD} \Rightarrow S_{\triangle ABO} = S_{\triangle COD}$$

حال به مسئله اصلی برمی‌گردیم. هدف ما این است که مساحت این دو مثلث ذکر شده یعنی $\triangle ABO$ و $\triangle COD$ را بر حسب S' و S'' بیان کنیم.

از مثلث‌های متشابه $\triangle BOC$ و $\triangle DOA$ که به علت برابری زوایا متشابه‌اند، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{CO}{OA} = \sqrt{\frac{S'}{S''}} \Rightarrow OA = OC \cdot \sqrt{\frac{S''}{S'}} \quad (1)$$

مساحت $\triangle AOB$ برابر است با:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin \widehat{BOA} \quad (2)$$

با جایگذاری (۱) به جای OA در (۲) داریم:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sqrt{\frac{S''}{S'}} \cdot \sin \widehat{BOA}$$



همچنین طبق داده‌های مسئله: $MN \parallel AB \parallel CD$ ، که به این معنی است که زاویه‌های مشابه در این مثلث با قاعده‌های موازی برابر هستند. مثلث‌های AFB و MFN و DFC متشابه هستند. زیرا زوایای متناظر آن‌ها برابرند. طول MN را با x و مساحت دوزنقه $AMNB$ و $MDCN$ را با S نمایش می‌دهیم:

گام اول) استفاده از تشابه مثلث‌ها:

از تشابه بودن دو مثلث AFB و MFN داریم:

$$\frac{S_{\triangle AFB}}{S_{\triangle MFN}} = \left(\frac{a}{x}\right)^2 \quad (1)$$

حال توجه داشته باشید که:

$$\widehat{BOA} = 180^\circ - \widehat{BOC} \text{ و از آنجا که } \sin(180^\circ - x) = \sin x$$

بنابراین داریم:

$$\sin(\widehat{BOA}) = \sin(\widehat{BOC})$$

با جایگذاری $\sin(\widehat{BOC})$ به جای $\sin(\widehat{BOA})$ در معادله

بالا به دست می‌آوریم:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sin(\widehat{BOC}) \cdot \sqrt{\frac{S''}{S'}}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AOB} = S' \cdot \sqrt{\frac{S''}{S'}} = \sqrt{S' S''}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

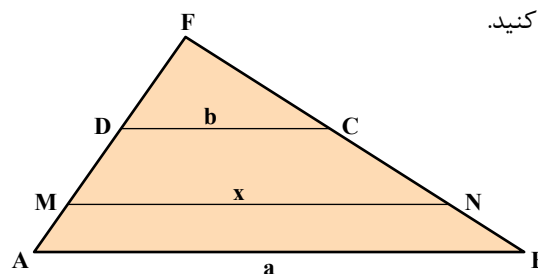
$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC} = \sqrt{S' S''}$$

و در نهایت برای پیدا کردن مساحت دوزنقه $ABCD$ باید مساحت چهارضلعی‌هایی که توسط قطرهای دوزنقه ایجاد شده‌اند را جمع کنیم:

$$S = S' + S'' + 2\sqrt{S' S''}$$

و تمام.

مسئله ۴. در دوزنقه $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = a$ و $CD = b$ خط MN موازی با قاعده‌های دوزنقه است و این دوزنقه را به دو دوزنقه با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند. طول MN را پیدا کنید.



حل:

ابتدا خطوط AD و BC را امتداد می‌دهیم تا در نقطه‌ای به نام F با یکدیگر تقاطع پیدا کنند. مثلث‌های جدید تشکیل شده AFB ، DFC و MFN زاویه مشترک F دارند.

گام چهارم) با دو رابطه‌های (۵) و (۶) داریم:

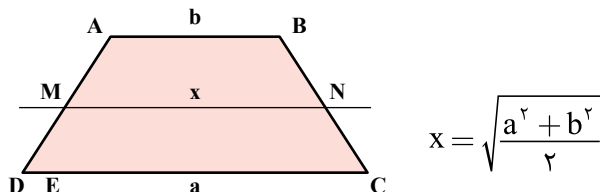
$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1 = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^2$$

و در نهایت داریم:

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

البته مسئله ممکن است راه‌حل‌های متنوعی داشته باشد. به‌عنوان مثال می‌توانید تلاش کنید. مساحت سه دوزنقه AMNB و MDCN و ABCD را بررسی کنید و طول MN را با استفاده از فرمول مساحت دوزنقه بیابید.

لازم به ذکر است در هر دوزنقه اندازه پاره‌خط موازی دو قاعده و متکی به دو ساق که مساحت دوزنقه را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، برابر است با میانگین مربعی اندازه دو قاعده.



$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

(جهت مطالعه بیشتر و اثبات این مورد/خیر می‌توانید به مجله ریاضی رشد برهان دوره متوسط ۲ شماره ۱۲۰ پاییز ۱۴۰۰ مراجعه نمایید.)

* پی‌نوشت

1. Geometry
2. marcus vitruvius
3. De Architectura
4. symmetry
5. proportion
6. area
7. similar polygons
8. corresponding linear elements
9. induction
10. triangle
11. base
12. altitude
13. assumption
14. parallelogram
15. right triangle
16. radii
17. inscribed circles
18. trapezoid

منبع

متن فوق، ترجمه فصل ۶ از کتاب Geometrical Kaleidoscope نوشته Boris Pritsker (۲۰۲۴) است.

و از متشابه بودن دو مثلث MFN و DFC داریم:

$$\frac{S_{\triangle DFC}}{S_{\triangle MFN}} = \left(\frac{b}{x}\right)^2 \quad (2)$$

گام دوم) استفاده از مساحت مثلث‌ها:

مثلث AFB شامل مثلث MFN و دوزنقه AMNB است. بنابراین مساحت آن به صورت زیر است:

$$S_{\triangle AFB} = S_{\triangle MFN} + S \quad (3)$$

همچنین مثلث MFN شامل مثلث DFC و دوزنقه MDCN است. بنابراین:

$$S_{\triangle MFN} = S_{\triangle DFC} + S$$

لذا داریم:

$$S_{\triangle DFC} = S_{\triangle MFN} - S \quad (4)$$

گام سوم) استفاده از روابط مساحت‌ها:

با جایگذاری مساحت مثلث AFB و DFC از روابط (۳) و (۴) در معادلات (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\triangle AFB}}{S_{\triangle MFN}} = \frac{S_{\triangle MFN} + S}{S_{\triangle MFN}} = 1 + \frac{S}{S_{\triangle MFN}} = \left(\frac{a}{x}\right)^2$$

که از آن نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{S}{S_{\triangle MFN}} = \left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1 \quad (5)$$

از معادله (۲) داریم:

$$\frac{S_{\triangle DFC}}{S_{\triangle MFN}} = \frac{S_{\triangle MFN} - S}{S_{\triangle MFN}} = 1 - \frac{S}{S_{\triangle MFN}} = \left(\frac{b}{x}\right)^2$$

که از آن نتیجه می‌گیریم:

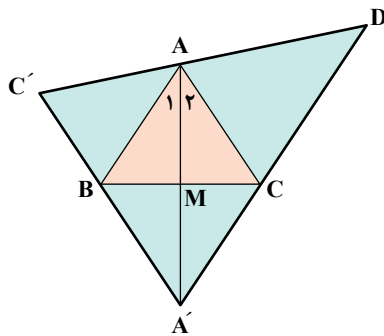
$$\frac{S}{S_{\triangle MFN}} = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^2 \quad (6)$$

هنرسه آشتی با

مقدمه: سلام بر همه عاشقان هندسه!

بسیار خوشحالم که باز هم فرصتی شد که با هم سراغ اژدهای خوشگل خودمان برویم و از خواب بیدارش کنیم تا با هم کمی قایم‌باشک بازی کنیم...

۲. با توجه به قضیه سینوس‌ها می‌توان نوشت:

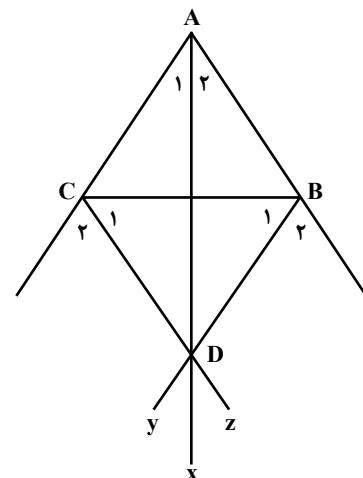


$$\begin{aligned} \frac{BM}{\sin A_1} &= \frac{AM}{\sin B}, \frac{CM}{\sin A_2} = \frac{AM}{\sin C} \\ \Rightarrow \frac{BM}{CM} &= \frac{\sin C}{\sin B} \times \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \\ \frac{BA'}{\sin A_1} &= \frac{AA'}{\sin(B + \frac{\pi}{3})}, \frac{A'C}{\sin A_2} = \frac{AA'}{\sin(C + \frac{\pi}{3})} \\ \Rightarrow \frac{BM}{CM} &= \frac{\sin C}{\sin B} \times \frac{\sin(B + \frac{\pi}{3})}{\sin(C + \frac{\pi}{3})} \end{aligned}$$

ابتدا به سراغ حل مسأله شماره گذشته برویم و آن‌ها را با هم بررسی کنیم.

۱. با توجه به این که AD ، BD و CD نیمسازند می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\sin \hat{BAX}}{\sin \hat{CAX}} \cdot \frac{\sin \hat{CBY}}{\sin \hat{ABY}} \cdot \frac{\sin \hat{ACZ}}{\sin \hat{BCZ}}$$



پس بنابر عکس قضیه سوا برای سینوس این سه خط هم‌رسند.



حل:

$$\hat{APB} = \pi - (\hat{APC}) \quad \text{می توان نوشت:}$$

$$\Rightarrow \cos(\hat{APB}) = -\cos(\hat{APC})$$

و بنابر رابطه کسینوس‌ها در مثلث‌های ABP و ACP می‌توان نوشت:

$$c^2 = p^2 + m^2 - 2pm \cos(\angle APB)$$

$$\Rightarrow \cos(\hat{APB}) = \frac{c^2 - p^2 - m^2}{-2pm}$$

$$b^2 = p^2 + n^2 - 2pn \cos(\hat{APC})$$

$$\Rightarrow \cos(\hat{APC}) = \frac{b^2 - p^2 - n^2}{-2pn}$$

$$\Rightarrow \frac{c^2 - p^2 - m^2}{2pm} = \frac{b^2 - p^2 - n^2}{-2pn}$$

$$\Rightarrow b^2 m + c^2 n = ap^2 + amn$$

تمرین ۱

طول میانه را در مثلث برحسب سه ضلع آن به‌دست آورید.

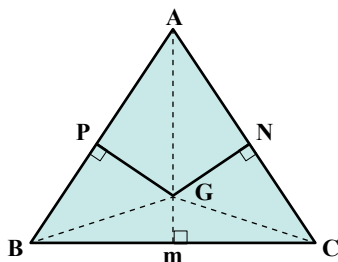
تمرین ۲

طول نیمسازهای داخلی در مثلث را برحسب سه ضلع مثلث به‌دست آورید.

◀ **قضیه کارنو:** نقاط M ، N و P به‌ترتیب بر اضلاع BC ، AC و AB قرار دارند. اگر عمودهای رسم شده از نقاط M ، N و P بر اضلاع BC ، AC و AB هم‌رس باشند آنگاه:

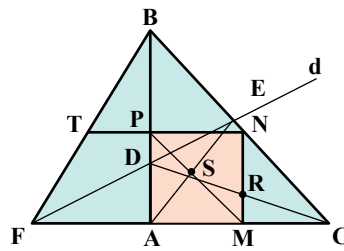
$$BM^2 - CM^2 + CN^2 - AN^2 + AP^2 - BP^2 = 0$$

● **اثبات:** عمودهای رسم شده از نقاط M ، N و P در نقطه O هم‌رس شده‌اند با توجه به قضیه فیثاغورس داریم.



حالا دو رابطه مشابه دیگر بنویسید و آن‌ها در هم ضرب کنید بنابر عکس قضیه بسط نتیجه را حاصل کنید.

۳. مثلث ABC و خط d مفروض است. M ، N و P وسط اضلاع مثلث هستند وسط CD روی قرار R دارد. (چرا؟) می‌توان نوشت:



$$\frac{BD}{DA} = \frac{NR}{RM}$$

$$\frac{AF}{CF} = \frac{TP}{TN}, \frac{CE}{BE} = \frac{MS}{PS}$$

با توجه به قضیه منلائوس می‌دانیم.

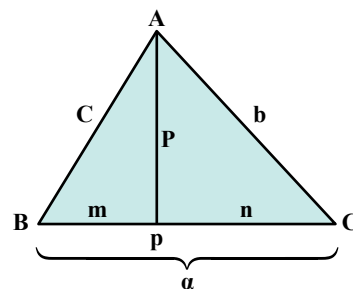
$$\frac{BD}{DA} \cdot \frac{AF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{NR}{MR} \cdot \frac{TP}{TN} \cdot \frac{MS}{PS} = 1$$

پس بنابر عکس قضیه منلائوس نقطه‌های T ، S و R بر روی یک خط واقع‌اند و موری در مثلث MNP است. اکنون با هم به اثبات چند قضیه کاربردی دیگر در هندسه می‌پردازیم.

■ رابطه استوارت:

اگر P نقطه‌ای روی ضلع BC از مثلث ABC باشد آنگاه:



$$ap^2 + amn = b^2 m + c^2 n$$

تمرین ۳

اگر عمودهای مرسوم از نقاط D, E و F به ترتیب اضلاع BC, AC و AB از مثلث ABC همسرند ثابت کنید.

$$BD^2 - CD^2 + CE^2 - AE^2 + AF^2 - BF^2 = 0.$$

تمرین ۴

مثلث ABC و نقاط D, E و F مفروش است ثابت کنید اگر:

$$BD^2 - CD^2 + CE^2 - AE^2 + AF^2 - BF^2 = 0.$$

آنگاه عمودهای مرسوم از D, E و F به ترتیب بر اضلاع BC,

AC و AB همسر هستند.

فعلاً... یا علی ...

ادب ریاضی

احصاء العلوم فارابی
ترجمة خدیو جم

منطق قوانینی را به دست می دهد
که انسان را از اشتباه و لغزش در معقولات
باز می دارد، قوانینی که به وسیله آنها،
در معقولات، آنچه را که ممکن است
خطاکننده ای در آنها خطا کند می آزمایند.
زیرا در مورد برخی از معقولات هرگز
امکان ندارد اشتباهی پیش آید،
و آن همان معقولاتی است که آدمی گوید
پنابر فطرت می تواند آنها را بشناسد و
در باره آنها یقین حاصل نماید، مانند اینکه
کل بزرگتر از جزء است، یا عدد ۳ فرد است.
اما امور دیگری نیز هست که ممکن است
در آنها خطایی پیش آید و آدمی را
در رسیدن به حقیقت به اشتباه بیافکند،
این گونه امور باید با فکر و اندیشه
و از طریق قیاس و استدلال فهمیده شود.
در این دسته از امور - نه در آن دسته اول -
هر کس خواستار دست یافتن
به حقیقت یقینی امور مطلوب باشد،
به قوانین منطق نیازمند می شود.

$$AP^2 = AO^2 - OP^2, BP^2 = BO^2 - OP^2$$

$$BM^2 - BO^2 - OM^2, CM^2 = CO^2 - OM^2$$

$$CN^2 = CO^2 - ON^2, AN^2 = AO^2 - ON^2$$

$$\Rightarrow BM^2 - CM^2 + CN^2 - AN^2 + AP^2 - BP^2$$

$$= BO^2 - OM^2 - CO^2 + OM^2 + CO^2 - ON^2$$

$$- AO^2 - OP^2 - BO^2 + OP^2 = 0.$$

◀ **عکس قضیه کارنو:** نقاط M, N و P به ترتیب بر اضلاع

BC, AC و AB قرار دارند.

فرض کنید:

$$BM^2 - CM^2 + CN^2 - AN^2 + AP^2 - BP^2 = 0.$$

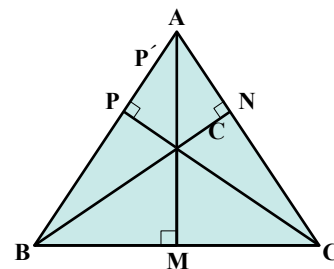
آنگاه عمودهای مرسوم از نقاط M, N و P به ترتیب بر اضلاع

BC, AC و AB همسرند.

برهان: محل برخورد عمودهای وارد شده از M و N را O را

می نامیم، O را به A, B و C وصل می کنیم از O عمودی بر AB

رسم می کنیم با توجه به قضیه کارنو داریم.



$$BM^2 - CM^2 + CN^2 - AN^2 + AP'^2 - BP'^2 = 0.$$

اکنون با مقایسه رابطه فوق و فرض مسأله می توان گفت:

$$AP^2 - BP^2 = AP'^2 - BP'^2$$

$$\Rightarrow (AP + BP)(AP - BP)$$

$$= (AP' + BP')(AP' - BP')$$

$$\Rightarrow AP - BP = AP' - BP'$$

$$\Rightarrow AP - AP' = BP - BP'$$

$$\Rightarrow PP' = -PP'$$

پس $PP = 0$ یعنی P و P' بر هم منطبق اند. حکم برقرار.

کاربردهای ریاضیات در فیزیک

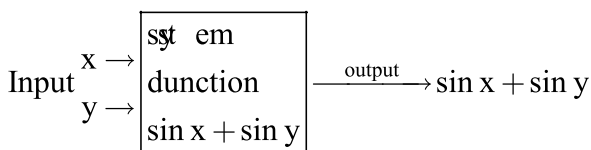
(موج)

مقدمه: موج یکی از مهم ترین مفاهیم بنیادی علم فیزیک است. از روش های انتقال انرژی از مکانی به مکان دیگر نیز هست. یعنی هنگامی که هدفی را دنبال کنیم بدین مضمون که انرژی از نقطه ای به نقطه دیگر منتقل گردد بدون آن که ذره ای از ماده در بستر مکان جابه جا شده باشد یعنی بدون آنکه در راستای انتقال انرژی ماده ای منتقل یا منتشر شده باشد از این ایده و روش بهره می بریم. موج ها اقسام متفاوتی دارند مانند موج های طولی - موج های عرضی - موج های پیچشی و ... و این ها با توجه به جهت های ارتعاش و انتشار تعریف می گردند. به عنوان مثال در موج های عرضی راستای انتشار و ارتعاش بر یکدیگر عمود هستند یعنی اگر ذرات محیط نوسان کننده در راستای قائم حرکت کنند آنگاه انتشار موج در جهت افقی صورت می پذیرد. در اینجا می خواهیم یک مفهوم و تفسیر تبیین ریاضی از مفهوم موج مطرح کنیم.

حال می خواهیم به تعریف یک تابع دو متغیره متناوب بپردازیم. تابعی با ضابطه $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره نامیده می شود چرا که بر حسب x و y دارای تغییراتی خواهند بود یا به هر جهت متغیرهای آن x و y هستند به عنوان مثال می توان تابع

$$\begin{cases} Z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ Z = f(x, y) = \sin x + \sin y \end{cases}$$

را نام برد و با توجه به شکل زیر رابطه ورودی خروجی آن را مشاهده نمود.



مثال

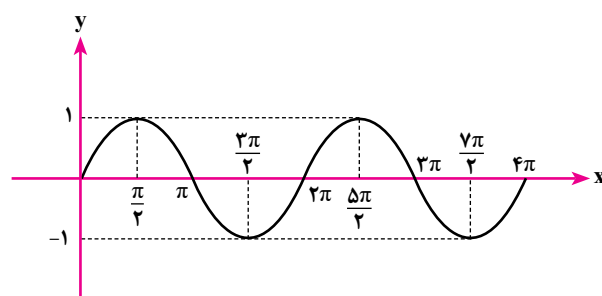
$$x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{3}{2}$$

با تعریف تابع متناوب آشنا هستیم. هرگاه تابع f با دامنه تعریف D_f و برد R_f معین و دارای دوره تناوب T باشد باید در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall x \in D_f: x + kT \in D_f, k \in \mathbb{Z} \\ \forall x \in D_f: f(x) = f(x + kT), k \in \mathbb{Z} \end{cases}, T > 0$$

پس حال تابع f با دوره تناوب T تکرار می گردد البته باید توجه نمود که مقادیر $f(x)$ تکرار می گردند و در هر فاصله kT از متغیر دقیقاً یک مقدار خواهند داشت مثال روشن این تابع عبارت است از:

$$y = \sin x \rightarrow T = 2\pi$$



$$y = \sin x \rightarrow T = 2\pi$$

اینک می‌خواهیم تعریفی برای تابع دو متغیره متناوب با تدقیق کافی ارائه کنیم.

۱. تابع دو متغیره با ضابطه $z = f(x, y)$ را متناوب نسبت به x می‌گوییم هرگاه در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall x \in D_f : x + kT_x \in D_f, k \in \mathbb{Z} \\ \forall x \in D_f : f(x, y) = f(x + kT_x, y) \end{cases}, T_x > 0$$

در اینجا D_{f_x} دامنه تعریف تابع نسبت به متغیر x است و T_x دوره تناوب نسبت به متغیر x است.

۲. تابع دو دوره با ضابطه $z = f(x, y)$ را متناسب نسبت به y می‌گوییم هرگاه در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall y \in D_{f_y} : y + kT_y \in D_{f_y}, k' \in \mathbb{Z} \\ \forall y \in D_{f_y} : f(x, y) = f(x, y + k'T_y) \end{cases}, T_y > 0$$

در اینجا D_{f_y} دامنه تعریف نسبت به متغیر y است و T_y دوره تناوب نسبت به متغیر y است.

۳. تابع دو متغیره با ضابطه $z = f(x, y)$ را نسبت به هر دو متغیر x و y متناوب می‌گوییم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in D_z : \\ \forall (x, y) \in D_z : \\ (x + kT_x, y + k'T_y) \in D_z : (k, k' \in \mathbb{Z}) \\ f(x, y) = f(x + kT_x, y + k'T_y) \\ (T_x, T_y) > (0, 0) \end{cases}$$

در اینجا D_z دامنه تعریف نسبت به هر دو متغیر x و y است یعنی $(T_x, T_y) = T_{xy} = T$ و $D_z = D_f = (D_{f_x}, D_{f_y})$ دوره تناوب تابع دو متغیر x و y است.

یعنی در اینجا چون، هم دامنه $\mathbb{R}^2$ است پس هر عضو در دامنه تعریف یک دوتایی (زوج) مرتب است به شکل (x, y) و چون برد $\mathbb{R}$ است پس هر عضو برد به شکل $z \in \mathbb{R}$ است.

نتیجه: بنابراین تا اینجا با یک تابع دو متغیره که نسبت به هر دو متغیر متناوب و دوره‌ای است آشنا شدیم و تعریف آن را بیان کردیم. حال اگر بخواهیم می‌توانیم این مفهوم را باز هم تعمیم داده

و به فضای $\mathbb{R}^n$ توضیح دهیم ولی چون در اینجا بحث فیزیکی و طبیعی و محسوس داریم بنابراین تا بستر چهار بعدی فضا - زمان می‌توانیم آن را تعمیم دهیم یعنی تابعی چهار متغیره با ضابطه $\psi = f(x, y, z, t)$ تعریف کنیم و بعد تابع متناوب چهار متغیره را مطابق زیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases} \forall (x, y, z, t) \in D_\psi : \\ \forall (x, y, z, t) \in D_\psi : \\ (x + k_1T_x, y + k_2T_y, z + k_3T_z, t + k_4T_t) \in D_\psi, k_i \in \mathbb{Z} \\ f(x, y, z, t) = f(x + k_1T_x, y + k_2T_y, z + k_3T_z, t + k_4T_t) \end{cases}$$

به شرط آن که $(T_x, T_y, T_z, T_t) > (0, 0, 0, 0)$.

حال یک تابع چهار متغیره که نسبت به هر چهار متغیر متناوب است در دست داریم. اگر این متغیرها را فضا و زمان در نظر بگیریم می‌توانیم فرم ساده‌تری از این تابع یا نگاشت دهیم.

$$\psi(\bar{r}, t) = f(x, y, z, t)$$

پس تعریف متناوب بودن آن نیز به فرم مقابل تبدیل می‌گردد.

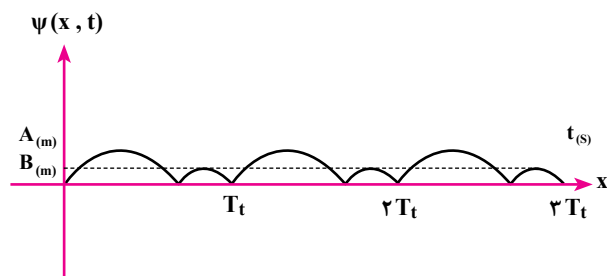
$$\begin{cases} \forall (\bar{r}, t) \in D_\psi : \\ \forall (\bar{r}, t) \in D_\psi : \\ (\bar{r} + k\bar{r}_0, t + k'T) \in D_\psi \\ f(\bar{r}, t) = f(\bar{r} + k\bar{r}_0, t + k'T) \end{cases} \in k, k' \in \mathbb{Z}, (\bar{r}_0, T) > (0, 0)$$

حال به تعریف الگوی ریاضی موج می‌پردازیم هر تابع چهار متغیر فضا - زمان را که نسبت به متغیرهای فضا و زمان متناوب و دوره‌ای و تکراری باشد، موج یا تابع موج می‌نامیم. پس موج یک حرکت است که نسبت به مکان و زمان در ابعاد مختلف در مکان تکراری و دوره‌ای است. پس موج یک حرکت است که در زمان تکرار می‌شود و در هر فاصله T ثانیه مجدداً به وضعیت اول برمی‌گردد و نیز در فضا و مکان نیز تکرار می‌شود یعنی در هر فاصله λ متر مجدداً به وضعیت اول برمی‌گردد اگر بخواهیم یک تعبیر محسوس و تجربی داشته باشیم این گونه مطرح می‌شود که اگر به یک حرکت موجی در یک لحظه خاص از زمان توجه کنیم و از تمام محیط ارتعاش عکسبرداری کنیم آنگاه متوجه می‌شویم که آن در آن لحظه و نیز هر لحظه دلخواه دیگر حرکت در محیط تکرار شونده بوده است (البته به شرط آنکه طول محیط بیشتر از چند طول موج باشد) یعنی مثلاً شکل ذیل را خواهیم دید.

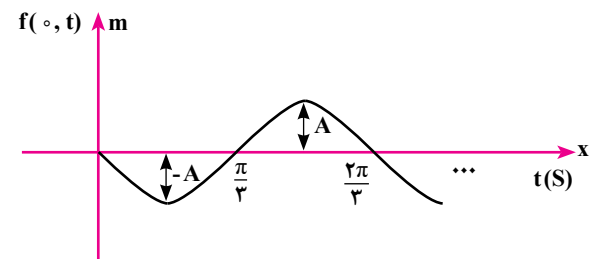
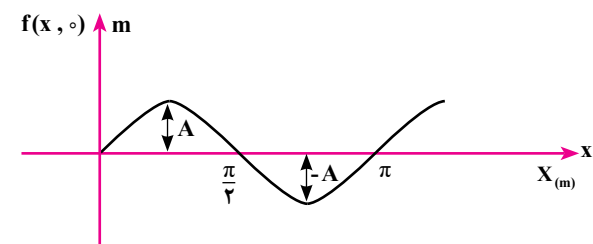
$$f(x, t) = A \sin(\omega x - \omega t)$$

$$\Rightarrow T_t = T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2}{\omega} \pi^s$$

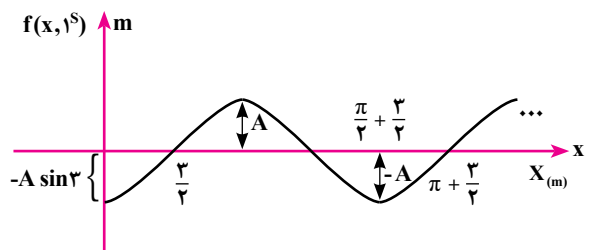
$$\text{مبدأ زمان } t = 0 \Rightarrow f(x, 0) = A \sin \omega x$$



$$\text{مبدأ مکان } x = 0 \Rightarrow f(0, t) = A \sin(-\omega t) = -A \sin \omega t$$

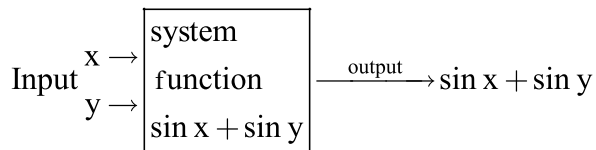


$$f(x, t) = A \sin(\omega x - \omega t)$$

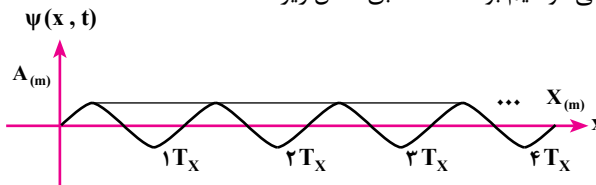


$$f(x, t) = A \sin(\omega x - \omega t)$$

پس موج فوق نسبت به زمان و مکان در حرکت است و این حرکت دوره‌ای و تکراری است.



و اگر یک دوربین فیلم‌برداری را در نقطه‌ای خاص و دلخواه از محیط ارتعاش فیکس و ثابت کنیم و از آن نقطه فیلم‌برداری کنیم باز هم ناظر و شاهد یک حرکت تکراری و دوره‌ای و متناوب می‌خواهیم بود مثلاً مطابق شکل زیر:



دوره تناوب در بعد زمان را زمان تناوب می‌گوییم و دوره تناوب در بعد مکان را طول موج می‌نامیم به‌طوری خود طول موج دارای سه بعد است یعنی (طولی - عرضی - ارتفاعی)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda} = (\lambda_x^{(m)}, \lambda_y^{(m)}, \lambda_z^{(m)}) \\ T_t = T^{(s)} \end{array} \right\} \Rightarrow T = (\bar{\lambda}, T_t)$$

واحد پریود زمانی معمولاً ثانیه و واحد پریود مکانی معمولاً متر است.

اینک به‌عنوان نمونه مثالی را با هم پاسخ می‌گوییم.

مثال

هرگاه ضابطه $f(x, t) = A \sin(\omega x - \omega t)$ نشان‌دهنده یک موج متحرک در امتداد محور x ها باشد (SI) مطلوب است.

الف) پریود و طول موج

ب) شکل موج در مبدأ زمان بر حسب x و در $t = 1^s$

ج) شکل موج در مبدأ مکان بر حسب t و در $x = 1^m$

حل:

می‌دانیم که پریود تابع $y = A \sin au$ برابر است با $T_u = \frac{2\pi}{|a|}$ بنابراین دوره زمانی و مکانی موج فوق عبارتند از:

$$f(x, t) = A \sin(\omega x - \omega t)$$

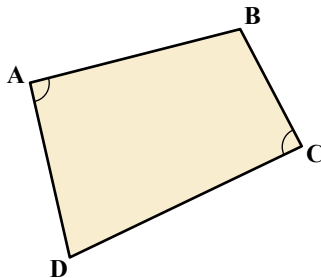
$$\Rightarrow T_x = \lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \pi^m$$



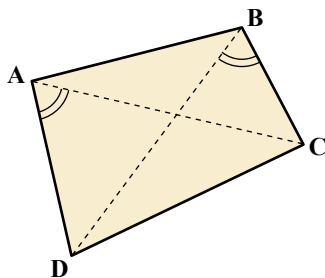
■ یادآوری چند نکته:

☀ نکته ۱: چهار ضلعی ABCD محاطی است اگر و فقط اگر:

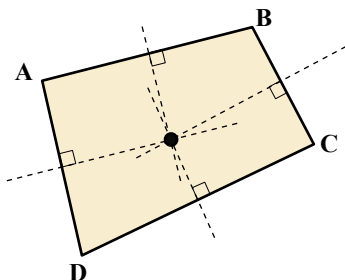
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$



$$\widehat{DAC} = \widehat{DBC} \text{ (ب)}$$

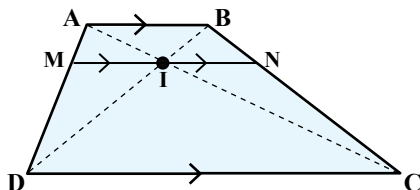


(ج) عمود منصف اضلاع هم‌رس باشند.



اثبات معادل بودن (الف)، (ب) و (ج) به عهده خوانندگان.

☀ نکته ۲:



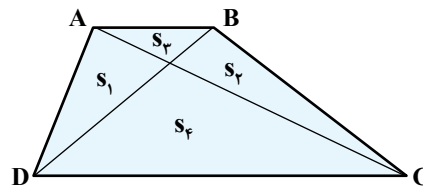
اگر از I محل تلاقی قطرهای دوزنقه، پاره خط MN را موازی قاعده و محصور بین دو ساق رسم کنیم داریم: $IM = IN$ و

$$\frac{1}{IM} = \frac{1}{IN} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$



دو قضیه در هندسه به نام‌های (شبه پروانه) و (پروانه) داریم که دلیل نام‌گذاری آن‌ها به خاطر شباهت شکل‌شان به پروانه است. ابتدا قضیه‌ای که تحت عنوان شبه پروانه در هندسه دهم عنوان شده را بیان می‌کنیم.

■ قضیه شبه پروانه در دوزنقه:



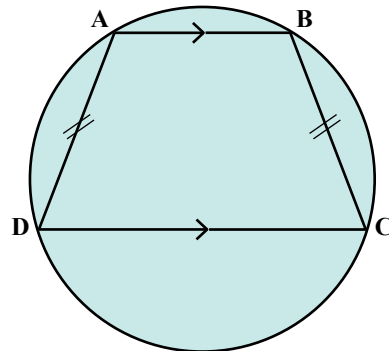
$$\text{الف) } S_1 = S_2$$

$$\text{ب) } S_1^2 = S_2^2 = S_3 \times S_4$$

$$\text{ج) } \sqrt{S(ABCD)} = \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4}$$

در کتاب هندسه دهم کاربردهایی از این قضیه بیان شده است، در این متن نمی‌خواهیم بیش از این به آن بپردازیم.

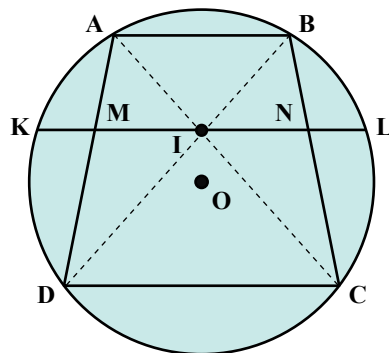
نکته ۳:



در بین دوزنقه‌ها، فقط دوزنقه متساوی الساقین هست که محاطی می‌باشد. زیرا جمع زاویه‌های روبه‌روی آن 180° است.

مسئله: دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ ($AB \parallel CD$)

در دایره محاط است و از محل تلاقی قطرهای وتر KL را به موازات قاعده‌ها رسم کرده‌ایم (مانند شکل) ثابت کنید: $KM = NL$.



اثبات: چون دو وتر AB و CD از دایره موازیند پس عمود منصف آن‌ها بر هم منطبق است و می‌دانیم وسط قاعده‌ها و محل برخورد قطرهای در دوزنقه روی یک خط راست واقع‌اند پس اگر O مرکز دایره باشد، OI عمود منصف وتر KL است از طرف دیگر می‌دانیم $MI = IN$ ، پس $KM = NL$.

یک سوال مهم:

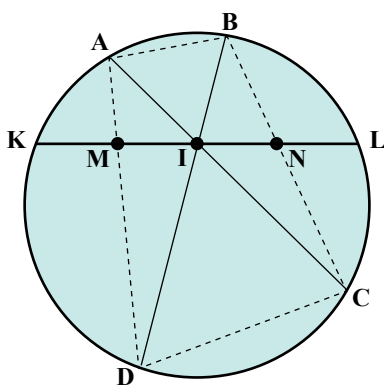
آیا عکس مطلب فوق برقرار است؟

یعنی اگر I محل تلاقی دو قطر چهار ضلعی محاطی باشد و I وسط وتر KL و آن وتر ضلع AD را در M و ضلع BC را در N قطع کند (مانند شکل قبل) و داشته باشیم $KM = NL$ و در نتیجه

$MI = IN$ ، آیا می‌توان نتیجه گرفت که چهارضلعی محاطی $ABCD$ ، یک دوزنقه متساوی الساقین است؟
قضیه زیر که به قضیه پروانه معروف است به پرسش فوق جواب (خیر) را می‌دهد.

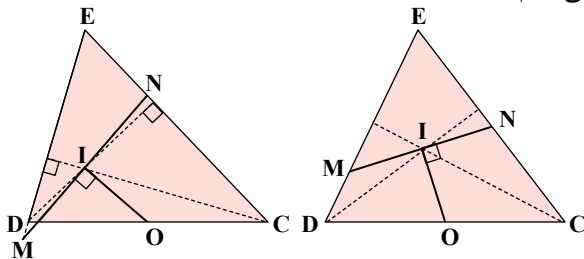
قضیه پروانه:

در دایره مفروض از نقطه I وسط وتر KL ، دو وتر AC و BD را رسم می‌کنیم وترهای AD و BC با وتر KL به ترتیب در نقاط M و N برخورد می‌کنند. ثابت کنید I وسط MN است.



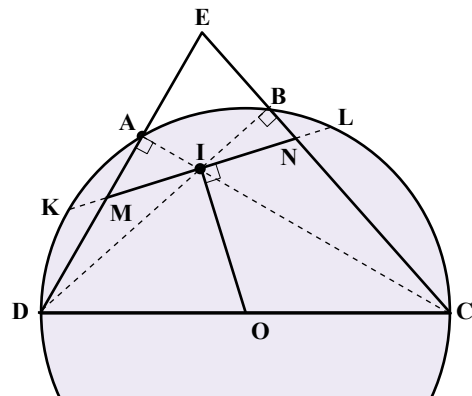
تذکر: توجه داریم که دو وتر گذرا از I یعنی AC و BD الزاماً هم اندازه نیستند، لهذا الزام به دوزنقه متساوی الساقین بودن چهارضلعی $ABCD$ ، منتفی است.
قبل از آنکه قضیه پروانه را اثبات کنیم، با حل یک مسئله، کاربردی از قضیه پروانه را بررسی می‌کنیم.

مسئله: مثلث ECD را مطابق شکل با مرکز ارتفاعی I در نظر می‌گیریم وسط CD را O نامیده و خطی عمود بر OI رسم می‌کنیم.



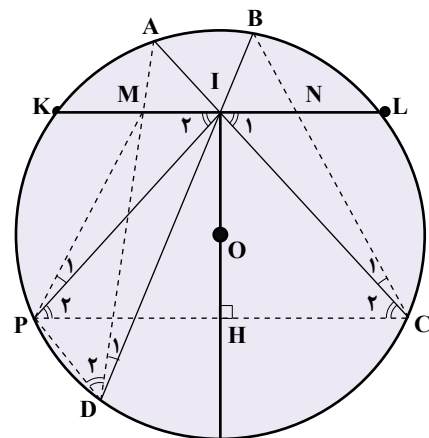
تا اضلاع یا امتداد اضلاع ED و EC را در M و N قطع کند. ثابت کنید: $IM = IN$.

ابتدا ارتفاع‌های CA و DB را رسم می‌کنیم از اینکه:
 $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = 90^\circ$



نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی ABCD محاطی است و مرکز دایره محیطی آن، نقطه O می‌باشد و همچنین عمود OI بر وتر KL و در نتیجه عمود منصف آن است و طبق قضیه پروانه داریم: $IM = IN$.

● اثبات قضیه (روش اول):



از خطی به موازات KL رسم می‌کنیم تا دایره را در P قطع کند. با توجه به عمود منصف بودن خط OH، نتیجه می‌گیریم که مثلث IPC متساوی‌الساقین است پس:

$$(1) \hat{I}_P = \hat{I}_1 = \hat{C}_P = \hat{P}_P$$

از طرف دیگر با توجه به محاطی بودن ABCD داریم:

$$(2) \hat{C}_1 = \hat{D}_1$$

همچنین با توجه به محاطی بودن PDCA داریم:

$$(3) \hat{C}_P = \hat{D}_P$$

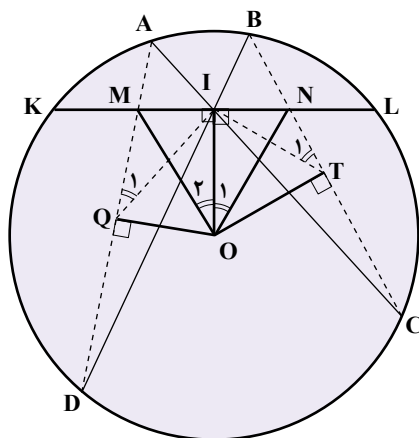
$$(1) \text{ و } (3) \Rightarrow \hat{D}_P = \hat{I}_P \Rightarrow \text{MIDP محاطی است}$$

$$\Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{D}_1 \xrightarrow{(2)} \hat{P}_1 = \hat{C}_1$$

$$\begin{cases} IP = IC \\ \hat{P}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{I}_1 = \hat{I}_P \end{cases} \Rightarrow \triangle INC \cong \triangle IPM$$

$$\Rightarrow IM = IN \Rightarrow KM = NL$$

● اثبات قضیه (روش دوم):



ابتدا از O بر دو وتر BC و AD عمودهایی رسم می‌کنیم و داریم:

$$BT = TC \text{ و } AQ = QD$$

از طرفی چون دو مثلث IBC و IAD متشابه‌اند، برابری

زوایایی که میانه‌های رسم شده از I بر دو قاعده پدید آورده‌اند را

$$\hat{T}_1 = \hat{O}_1 \text{ می‌توانیم نتیجه بگیریم یعنی:}$$

$$(2) \widehat{OIN} = \widehat{OTN} = 90^\circ \Rightarrow \text{INTO محاطی است}$$

$$\Rightarrow \hat{T}_1 = \hat{O}_1$$

$$(3) \widehat{OIM} = \widehat{OQM} = 90^\circ \Rightarrow \text{IMQO محاطی است}$$

$$\Rightarrow \hat{Q}_1 = \hat{O}_P$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_P \Rightarrow \text{در مثلث OI, OMN نیمساز است}$$

چون در مثلث OMN، OI هم ارتفاع و هم نیمساز است

نتیجه می‌گیریم که $MI = IN$ و همچنین $KM = NL$.

داده کاوی



گام‌های فرایند داده کاوی

گام اول پاکسازی: در این گام داده‌های نامرتبط از مجموع حذف می‌شوند و برای داده‌های ناموجود نیز تدابیری اندیشیده می‌شود.

گام دوم یکپارچه‌سازی داده: داده‌های به‌دست آمده از منابع گوناگون، ارزیابی و تحلیل می‌شوند و در یک انبار داده مستقر می‌شوند.

گام سوم انتخاب داده: داده‌های مورد نیاز برای تحلیل در این فاز انتخاب می‌شوند.

گام چهارم تبدیل داده: تبدیل داده روشی برای تثبیت داده محسوب می‌شود که در آن فرم داده‌ها تغییر می‌کند. داده‌ها به شکلی استاندارد و ساده‌تر برای تحلیل تبدیل می‌شوند.

گام پنجم کاوش داده: استخراج الگوهای مهم به شکل هوشمند انجام می‌شود.

گام ششم ارزیابی الگو: دقت، صحت و قابلیت الگوهای به‌دست آمده بررسی می‌شوند.

گام هفتم ارائه: نتیجه به‌دست آمده یا به اصطلاح دانش، به شیوه‌ای که برای کاربر قابل درک باشد ارائه می‌شود. در این مرحله فاز بصری‌سازی نیز دخیل خواهد بود که نقش بسیار مهمی در درک و تفسیر نتایج دارد.

کاربرد ریاضی در داده کاوی

ریاضی، پایه و اساس بسیاری از الگوریتم‌های داده کاوی است. بیایید چند مثال ساده بزنیم:

مثال ۱

پیدا کردن الگوها با استفاده از میانگین و انحراف معیار فرض کنید می‌خواهید بدانید چه محصولاتی در فروشگاه شما بیشتر فروخته می‌شود. با استفاده از ریاضی، میانگین فروش هر محصول را محاسبه می‌کنید و محصولاتی که فروششان بالاتر از میانگین است را پیدا می‌کنید.

مثال ۲

خوشه‌بندی داده‌ها

در این روش داده‌ها را به گروه‌های مشابه تقسیم می‌کنیم. مثلاً فرض کنید داده‌های دانش‌آموزان یک مدرسه شامل نمرات ریاضی

چکیده: داده کاوی فرآیندی است که در آن از داده‌های زیاد و پراکنده، اطلاعات کاربردی و مفیدی استخراج می‌شود. به عبارت دیگر استخراج دانش از میان مجموعه‌ای از داده‌های خام را داده کاوی می‌نامند. این کار با استفاده از روش‌های ریاضی، آمار و الگوریتم‌های کامپیوتری انجام می‌شود. هدف اصلی داده کاوی این است که از میان حجم بزرگی از داده‌ها، الگوها و اطلاعات و ارتباطات پنهان را کشف کنیم. این کشف ارتباطات، منجر به بهبود عملکرد ما در حوزه‌های مختلف تجاری، صنعتی، پزشکی، نظامی و ... خواهد شد.

اهمیت داده کاوی

امروز حجم داده‌هایی که در دنیا تولید می‌شوند بسیار زیاد است؛ از اطلاعات خرید مشتریان در فروشگاه‌ها گرفته تا داده‌های ثبت شده در شبکه‌های اجتماعی. این داده‌ها اگر به درستی تحلیل شوند، می‌توانند به شرکت‌ها، سازمان‌ها و حتی دانشمندان کمک کنند تا میدان کاری خود را بهتر دیده و در نتیجه تصمیمات بهتری بگیرند.

به ماشین‌ها اجازه می‌دهد زبان انسان را بفهمند و به‌طور خودکار آن را پردازش کنند.

🔗 **تحقیقات جنایی و جرم‌شناسی:** از داده کاوی می‌توان برای بررسی ارتباطات بین حوادث جنایی و ... استفاده کرد. داده کاوی در بسیاری از حوزه‌های دیگر کاربرد دارد.



■ پیش‌نیازهای داده کاوی به صورت عملی

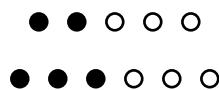
داده کاوی نیاز به آشنایی با مباحثی چون ریاضیات و آمار، برنامه‌نویسی، مفاهیم و ارتباطات کسب و کار دارد. مطالعه در زمینه‌هایی چون:

- 🔗 یادگیری ماشین
- 🔗 جبر خطی
- 🔗 تحلیل آماری
- 🔗 پایگاه داده و بازیابی اطلاعات
- 🔗 الگوریتم‌ها و ساختار داده
- 🔗 هوش مصنوعی
- 🔗 توانایی حل مسئله

کار با نرم‌افزارهایی مانند Weka، Rapid Miner و غیره برای شروع آموزش داده کاوی توصیه می‌شود. زبان‌های برنامه‌نویسی R و Python در این زمینه بسیار جا افتاده هستند. زبان R از پشتیبانی قوی برخوردار است و در تحلیل‌های سنگین به خوبی می‌تواند با جاوا (Java) و سی (C) همکاری کند.

زبان Python نیز کاربرد زیادی در حوزه داده کاوی و یادگیری ماشین دارد و به علت داشتن کتابخانه‌ها و چارچوب‌های نرم‌افزاری فراوان بین برنامه‌نویسان این حوزه محبوب است.

و علوم را داریم. با استفاده از نمودار زیر، می‌توان دانش‌آموزان را به دو گروه قوی و ضعیف در هر دو درس تقسیم کرد. این نمودار نشان می‌دهد چگونه داده‌های نمرات دانش‌آموزان به دو گروه خوشه‌بندی می‌شوند:



(گروه ● نمایانگر دانش‌آموزان قوی و گروه ○ نمایانگر دانش‌آموزان ضعیف است.)

➤ مثال ۳ ➤

🔗 رگرسیون و پیش‌بینی

یکی از ابزارهای مهم در داده کاوی رگرسیون است. این روش به ما کمک می‌کند روابط بین متغیرها را پیدا کنیم. مثلاً اگر می‌خواهید پیش‌بینی کنید که فروش شما در ماه آینده چقدر خواهد بود، می‌توانید از داده‌های فروش ماه‌های قبل استفاده کنید.

■ کاربردهای داده کاوی

داده کاوی در هر زمینه‌ای که به آن نیاز است، می‌تواند کاربرد داشته باشد. امروزه داده کاوی در موارد زیر به کار می‌رود:

- 🔗 **سلامت عمومی:** که در جهت گسترش فرهنگ بهداشت با کمترین هزینه، در مناطق مختلف جهان است.
- 🔗 **تحقیقات بازار خرید مشتریان:** این مبحث که به نوعی کاربرد داده کاوی در مدیریت است در پی شناسایی کالاهای مرتبط با سبد خرید مشتری است تا امکان خرید آن‌ها را افزایش دهد.
- 🔗 **آموزش:** فعالیت این زمینه در جهت بهبود کیفیت سیستم آموزشی و هدایت صحیح دانش‌آموزان است.
- 🔗 **ساخت و عمران:** تلاش این حوزه در جهت تسهیل راه‌سازی و الگوهای بین شهری با توجه به افزایش جمعیت است.
- 🔗 **مدیریت ارتباطات مشتریان (CRM):** هدف بهبود روابط مشتریان با شرکت‌ها و افزایش بهره‌وری است.
- 🔗 **جلوگیری از حملات الکترونیکی بانکی:** به منظور شناسایی الگوریتم‌های حمله مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- 🔗 **متن کاوی:** فرایند تبدیل متن بدون ساختار به داده‌های ساختاریافته برای تجزیه و تحلیل راحت‌تر است. متن کاوی

مثال

طبقه‌بندی مشتریان بر اساس خرید محصول

فرض کنید داده‌های ما به شکل زیر است:

مشتري	سن	درآمد	خرید کرده؟
۱	جوان	بالا	بله
۲	میانسال	متوسط	خیر
۳	جوان	پایین	بله
۴	مسن	بالا	خیر

● **هدف:** پیش‌بینی کنیم که آیا مشتری جدید خرید خواهد کرد یا خیر.

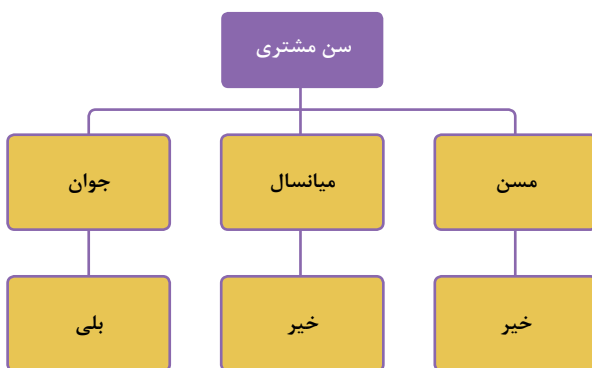
۱. محاسبه آنتروپی اولیه:

برای ویژگی «خرید کرده؟» داریم:

تعداد کل مشتریان:

تعداد «بله»: ۲، تعداد «خیر»: ۲.

در این راستا آنتروپی اولیه را برای ویژگی خرید کرده یا خیر و محاسبه کسب اطلاعات برای ویژه سن را انجام می‌دهیم و نمودار درخت تصمیم زیر را بر آن اساس رسم می‌کنیم:



۲. توضیح نمودار:

اگر مشتری جوان باشد، احتمال خرید زیاد است (برچسب «بله»).
اگر مشتری مسن باشد، احتمال خرید کم است (برچسب «خیر»).
این فرایند به انتخاب بهترین ویژگی برای طبقه‌بندی مشتریان کمک می‌کند.

یکی از کاربردهای مهم داده کاوی

یکی از کاربردهای اصلی داده کاوی، طبقه‌بندی است که در مسائل تصمیم‌گیری و پیش‌بینی استفاده می‌شود. به عنوان مثال، طبقه‌بندی مشتریان به گروه‌های مختلف براساس رفتار خرید. در اینجا از درخت تصمیم‌گیری استفاده می‌کنیم و با فرمول‌های ریاضی و نمودار توضیح می‌دهیم.

فرمول ریاضی: محاسبه آنتروپی و کسب اطلاعات

آنتروپی معیاری برای اندازه‌گیری میزان عدم قطعیت در داده‌ها است. برای یک مجموعه S با n عضو، آنتروپی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(s) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)$$

P_i : احتمال وقوع عضو i است.

به عنوان مثال از روابط فوق، فرض کنید داده‌های ما در مورد دانش‌آموزان یک کلاس به شکل زیر است:

تعداد	نتیجه
۶	قبول
۴	رد

احتمال هر دسته را محاسبه می‌کنیم. احتمالی قبولی ۰/۶ و احتمال مردودی ۰/۴ است و مقدار آنتروپی را محاسبه می‌کنیم:

$$H(s) = -[(0/6 \cdot \log_2(0/6)) + (0/4 \cdot \log_2(0/4))]$$

$$\log_2 0/6 = -0/736$$

$$\log_2 0/4 = -1/321$$

$$H(s) = -[-0/4416 + (-0/5284)] = 0/97$$

در این مثال مقدار آنتروپی ۰/۹۷ است. این عدد نشان می‌دهد که داده‌های ما تا حدی نامطمئن یا پراکنده هستند. اگر همه داده‌ها متعلق به یک دسته بودند (مثلاً همه دانش‌آموزان قبول بودند)، مقدار آنتروپی صفر می‌شد چون هیچ بی‌نظمی و عدم قطعیتی وجود نداشت.

۳. تفسیر:

روش های طبقه بندی مانند درخت تصمیم گیری به کسب اطلاعات از داده ها و کاهش عدم قطعیت کمک می کنند. این الگوریتم ها را می توان برای کاربردهای مختلف مانند پیش بینی رفتار مشتریان یا تشخیص تقلب استفاده کرد.



جمع بندی

داده کاوی به ما کمک می کند تا از میان انبوهی از اطلاعات، الگوها و عقاید پنهان را کشف کنیم. ریاضی ابزار اصلی برای تحلیل داده ها است و به ما امکان می دهد تا این اطلاعات را به صورت دقیق و منظم دسته بندی کنیم. در نتیجه، یادگیری مفاهیمی مانند میانگین، انحراف معیار و نمودارها می تواند شما را برای ورود به دنیای داده کاوی آماده کند. این روند رو به رشد و اقبال بیشتر در صنعت و تجارت است زیرا طبق آمارها روزانه حدود ۲ اگزابایت (Exa Byte) یعنی چیزی حدود یک میلیون ترابایت (Tra Byte) داده توسط افراد و مؤسسه ها تولید می گردد.

این حجم عظیم از داده ها باعث بروز مفهوم کلان داده می شود که شرکت ها را به استفاده از دانش داده کاوی ترغیب می کند تا بیشتر از متخصصین این حوزه بهره ببرند.

واژه نامه تخصصی

۱	داده کاوی	Data Mining
۲	الگوریتم ها	Algorithm
۳	خوشه بندی	Clustering
۴	طبقه بندی	Classification
۵	داده ها	Data
۶	مدل سازی پیش بینانه	Predictive Modeling

۷	تحلیل الگو	Pattern Analysis
۸	کشف دانش	Knowledge Discovery
۹	پیش بینی	Prediction
۱۰	رگرسیون	Regression
۱۱	درخت تصمیم گیری	Decision Tree
۱۲	قوانین انجمنی	Association Rules
۱۳	کاهش ابعاد	Dimensionality Reduction
۱۴	استخراج ویژگی ها	Feature Extraction
۱۵	تمیز دادن داده ها	Data Cleaning
۱۶	پیش پردازش داده ها	Data Preprocessing
۱۷	بصری سازی داده ها	Data Visualization
۱۸	تحلیل خوشه ای	Cluster Analysis
۱۹	کلان داده	Big Data
۲۰	سیستم های توصیه گر	Recommender Systems
۲۱	داده کاوی متنی	Text Mining
۲۲	یادگیری ماشین	Machine Learning
۲۳	آنتروپی	Entropy
۲۴	کسب اطلاعات	Information Gain

مراجع

۱. کتاب ها:

«Data Mining: Concepts and Techniques» نوشته جیایو هان،

میشلین کامبر و جیان پی. این کتاب یکی از منابع جامع و معتبر در زمینه مفاهیم و تکنیک های داده کاوی است.

«Introduction to Data Mining» نوشته پنگ - نیگ تان، مایکل

استینیخ و ویپین کومار. این کتاب به معرفی اصول و روش های داده کاوی می پردازد.

۲. مقالات علمی:

«داده کاوی، تکنیک ها و کاربردهای آن» نوشته حسین رضایی دولت آبادی و هما شریعتی این مقاله به بررسی تکنیک ها و کاربردهای داده کاوی پرداخته است.

«کاربردهای داده کاوی در علم اطلاعات و دانش شناسی» نوشته مهدی رحمانی و محسن حاجی زین العابدینی. این مقاله به بررسی کاربردهای داده کاوی در حوزه علم اطلاعات می پردازد.

۳. وب سایت ها و منابع آنلاین:

مجله فرادرس: این وبسایت مقالات متعددی در زمینه داده کاوی ارائه می دهد، از جمله مقاله «داده کاوی (Data Mining) - از صفر تا صد».

آکادمی داده: این وبسایت مقالاتی در زمینه مفاهیم و تکنیک های داده کاوی منتشر کرده است، مانند «مروری بر متن کاوی: مفاهیم، تکنیک ها و چالش ها».



غفلتی شیرین، عبرتی بालب

مقدمه: با عرض خالصانه‌ترین سلام‌ها و احترام و ادب خدمت دست‌اندر کاران مجله وزین، غنی و مفید برهان دانش و تفکر ریاضی، از سردبیر گرفته تا بقیه، همچنین با آرزوی توفیق روزافزون برای شما عزیزان که دل در گرو بهبود آموزش درست ریاضیات کشور عزیزمان ایران دارید. موضوعی که به آن اشاره خواهیم کرد، از این‌جا شروع شد که در یکی از گروه‌های ریاضی تلگرام یکی از همکاران پاسخ یکی از دانش‌آموزان را به اشتراک گذاشت و خواهان هم‌فکری با همکاران شد، با این مضمون: آیا راه‌حل دانش‌آموز درست است، با روش نادرست به جواب درست رسیده است، اشتباه این دانش‌آموز باعث شد بنده مطلب را دقیق بررسی و به‌صورت زیر خدمتتان ارسال کنم.

به نام آن که جان را فکرت آموخت، به نام خدا

جواب یکی از دانش‌آموز:

$$\text{الف)} |x-2| + |x-6| = |x-2+x-6|$$

$$= |2x-8| = 9 \Rightarrow 2x-8 = \pm 9$$

$$\begin{cases} 2x-8=9 \\ 2x-8=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{17}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right\}$$

$$\text{ب)} |x-1| + |x-5| \leq 7$$

$$\Rightarrow |x-1+x-5| \leq 7 \Rightarrow |2x-6| \leq 7$$

$$\Rightarrow -7 \leq 2x-6 \leq 7 \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 13$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$$

$$\text{مجموعه جواب} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right]$$

سؤال معلم:

نامعادله زیر را حل کنید.

$$|x-2| + |x+4| \leq 8$$

جواب دانش‌آموز:

$$|x-2+x+4| \leq 8 \Rightarrow |2x+2| \leq 8 \Rightarrow -8 \leq 2x+2 \leq 8$$

$$-10 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -5 \leq x \leq 3$$

معلم:

معادله و نامعادله زیر را حل کرده، مجموعه جواب آن‌ها

را به‌دست آورید.

$$\text{الف)} |x-2| + |x-6| = 9$$

$$\text{ب)} |x-1| + |x-5| \leq 7$$

حل درست سؤالات فوق:

الف) $|x-2| + |x-6| = 9$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ -x+2-x+6=9 \Rightarrow -2x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\cap} x = -\frac{1}{2}$ ق (۱)

$$\begin{cases} 2 < x < 6 \\ x-2-x+6=9 \Rightarrow 4=9 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset \text{ غ ق (۲)}$$

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x-2+x-6=9 \Rightarrow 2x=17 \Rightarrow x=\frac{17}{2} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\cap} x = \frac{17}{2}$ (۳)

مجموعه جواب $= (۱) \cup (۲) \cup (۳) = \{-\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\}$

همان جواب دانش آموز به دست آمد!!

ب) $|x-1| + |x-5| \leq 7$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -x+1-x+5 \leq 7 \Rightarrow -2x \leq 1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\cap} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ (۱)

$$\begin{cases} 1 < x < 5 \\ x-1-x+5 \leq 7 \Rightarrow 4 \leq 7 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 1 < x < 5 \text{ (۲)}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x-1+x-5 \leq 7 \Rightarrow 2x \leq 13 \Rightarrow x \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\cap} 5 \leq x \leq \frac{13}{2}$ (۳)

مجموعه جواب $= (۱) \cup (۲) \cup (۳) \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= [-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}]$

باز هم همان جواب دانش آموز به دست آمد!!

عبرت جالب:

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند آن گاه:

$$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

ابتدا $|a+b| \leq |a| + |b|$ را در نظر می گیریم.

می دانیم اگر $ab \geq 0$ آن گاه $|a+b| = |a| + |b|$

اگر $ab < 0$ آن گاه $|a+b| < |a| + |b|$

حال توابع $f(x) = |x-a| + |x-b|$ و

$$g(x) = |(x-a) + (x-b)|$$

با فرض $a < b$ را در بازه های مختلف با هم مقایسه می کنیم.

$$f(x) = |x-a| + |x-b|$$

$$= \begin{cases} -x+a-x+b, & x \leq a \\ x-a-x+b, & a < x < b \\ x-a+x-b, & x \geq b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x+(a+b), & x \leq a \\ b-a=|a-b|, & a < x < b \\ 2x-(a+b), & x \geq b \end{cases}$$

$$g(x) = |(x-a) + (x-b)| = |2x-(a+b)|$$

$$= \begin{cases} -2x+(a+b), & x < \frac{a+b}{2} \\ 2x-(a+b), & x \geq \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

if $x \leq a \Rightarrow x < \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow (x \leq a \Rightarrow f(x) = g(x))$$

$$\Rightarrow |x-a| + |x-b| = |(x-a) + (x-b)|$$

if $x \geq b \Rightarrow x \geq \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow (x \geq b \Rightarrow f(x) = g(x))$$

$$\Rightarrow |x-a| + |x-b| = |(x-a) + (x-b)|$$

برای روشن شدن بیشتر مطلب فوق نمودارهای دو تابع را رسم

می کنیم.

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{a+b}{2} = \frac{k}{2} \\ x - \frac{a+b}{2} = -\frac{k}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b+k}{2} \\ x = \frac{a+b-k}{2} \end{cases}$$

$$|x-a| + |x-b| \leq k \xrightarrow{k > |a-b|}$$

$$|(x-a) + (x-b)| \leq k \Rightarrow |2x - (a+b)| \leq k$$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-k}{2} \leq x \leq \frac{a+b+k}{2}$$

تمرین

معادله و نامعادله زیر را حل کرده مجموعه جواب آن‌ها را به دست آورید.

الف) $|x+3| + |x-1| = 5$

ب) $|x+3| + |x-1| \leq 6$

نتیجه: معادله $|x-a| + |x-b| = k$ و نامعادله $|x-a| + |x-b| \leq k$ (الف) $(a < b)$.

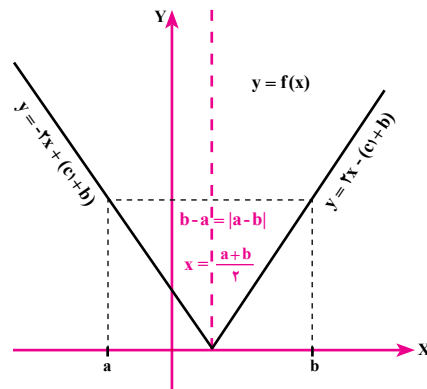
الف) به ازای $k < |a-b|$ جواب ندارند.

ب) به ازای $k = |a-b|$ مجموعه جواب هر دو (معادله و نامعادله) بازه $[a, b]$ می‌باشد.

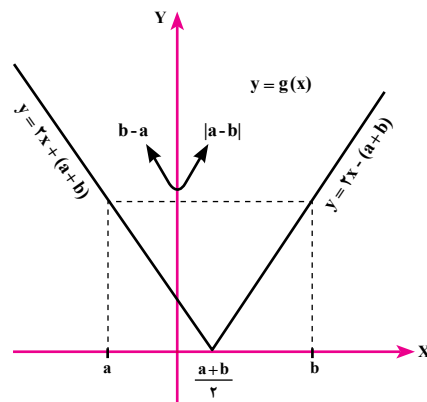
پ) به ازای $k > |a-b|$ برای پیدا کردن مجموعه جواب معادله و نامعادله فوق عبارت $|x-a| + |x-b|$ را با عبارت $|(x-a) + (x-b)|$ جایگزین و حل می‌کنیم.

سؤال: بررسی کنید با توجه به رابطه $|a| - |b| \leq |a+b|$

و b دو عدد حقیقی دلخواه توابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ و $g(x) = |(x-a) + (x-b)|$ چه ارتباطی با هم دارند؟



$$R_f = [|a-b|, +\infty)$$



$$R_g = [0, +\infty)$$

حال با توجه به مطالب فوق معادله $|x-a| + |x-b| = k$ و نامعادله $|x-a| + |x-b| \leq k$ را بررسی می‌کنیم.

(۱) اگر $k < |a-b|$ باشد، مجموعه جواب معادله و نامعادله فوق تهی خواهد بود.

(۲) اگر $k = |a-b|$ باشد، مجموعه جواب معادله و نامعادله فوق بازه $[a, b]$ خواهد بود.

(۳) اگر $k > |a-b|$ برای حل معادله و نامعادله فوق می‌توان به جای عبارت $|x-a| + |x-b|$ عبارت $|(x-a) + (x-b)|$ را جایگزین نموده و سریع‌تر و راحت‌تر به مجموعه جواب رسید.

$$|x-a| + |x-b| = k \xrightarrow{k > |a-b|}$$

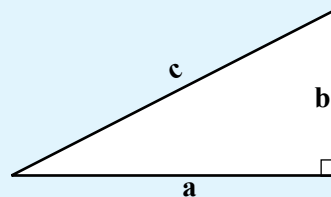
$$|(x-a) + (x-b)| = k \Rightarrow |2x - (a+b)| = k$$

ریاضیات یک صفحه‌ای

♦ مهدی اقبالی املشی *

یک نامساوی

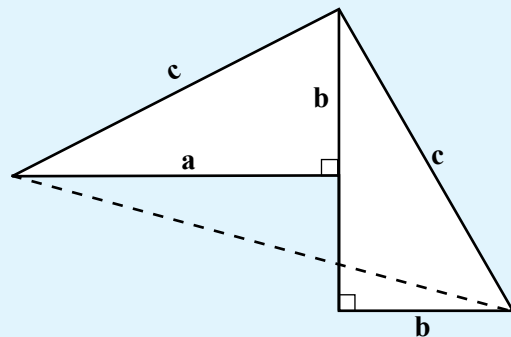
۱. در مثلث قائم‌الزاویه:



می‌دانیم: (چرا؟)

$$c \leq a + b$$

۲. حال مثلثی هم‌نهشت با مثلث بالا به صورت زیر در کنار آن رسم می‌کنیم:



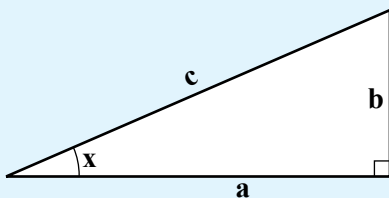
می‌توان نوشت: (چرا؟)

$$a + b \leq c\sqrt{2}$$

۳. لذا در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع قائمه‌ا a و b وتر c داریم:

$$c \leq a + b \leq c\sqrt{2}$$

۴. و لذا:



$$1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

۵. جدی: می‌دانیم در حالت کلی

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

چرا در ۴ سمت چپ نامساوی، ۱ آمده؟

۶. نشان دهید: (به کمک شکل) که در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده x :

$$-1 \leq \sin x - \cos x \leq 1$$

۷. شکل‌ها حرف می‌زنند.

📖 لطفاً، روز بی‌ریاضی نداشته باشیم. 📖

عبدالرحمن صوفی رازی

ابوالحسین عبدالرحمن بن صوفی رازی، فاضلی جلیل و منجمی عالی مقام اهل فسای فارس بود. وی در چهاردهم محرم سال ۲۹۱ هجری قمری در شهر ری به دنیا آمد و در سیزدهم محرم ۳۷۶ دار فانی را وداع گفت.

به گفته خودش، در سال ۳۳۷ در اصفهان در هم‌نشینی **ابن عمید**، وزیر معروف بود و در سال ۳۵۹ در شیراز به رصد اشتغال داشت. به بیان دقیق آقای **ابوالقاسم قربانی** در کتاب «ریاضی‌دانان ایرانی از خوارزمی تا ابن‌سینا»، صوفی رازی اثر بسیار ارزنده و نفیس خود یعنی کتاب «صورالکواکب» را به پاس حق‌شناسی به ابن‌عمید هدیه کرده است. صوفی گره‌ای از آلیاژ نقره به وزن تقریبی ۹۰ کیلوگرم با کارکرد نجومی برای **عضدالدوله دیلمی** ساخته بود.

ابوریحان بیرونی در کتاب «قانون مسعودی» از عبدالرحمن صوفی و تعیین قدر ستارگان توسط او یاد کرده است. بیرونی از جدول‌های قدر ستارگان صوفی رازی بهره می‌گرفت و به رصدهای دقیق او در کتاب‌های خود اشاره کرده است. «قدر ظاهری» در واقع مقدار عددی روشنایی رسیده از ستاره به چشم ماست. اما چون ستاره‌ها در فاصله‌های بسیار گوناگونی از ما قرار دارند، اینکه قدرهای ظاهری آن‌ها را نشان‌دهنده درخشندگی واقعی آن‌ها بدانیم، اشتباه است.

عبدالرحمن صوفی علاقه‌مند بود که خودش رصدهای دقیقی انجام بدهد و همین امر باعث شد، برخی از اشتباهات پیشینیان خود را در کتاب «المجسطی» بطلمیوس بیابد.



✦ رساله اسطرلاب

این کتاب در به زبان فارسی در ۴۶ فصل نوشته شده است که نسخه‌ای از آن در کتابخانه دانشگاه تهران موجود است

✦ کتاب العمل بالکرة الفلكية

در سه مقاله و ۱۵۷ فصل برای صمصام‌الدوله دیلمی تألیف شده است.

✦ کتاب المدخل الی علم النجوم و الحکامه

در ۵ مقاله و ۶۴ فصل که عبدالرحمن صوفی برای ابوعمر و محمد بن سعید بن مرزبان بن سهل اصفهانی نوشته است

✦ کتاب تذکره و مطارح الشعاعات

ابوریحان بیرونی در کتاب قانون مسعودی و ابن‌قفطی در کتاب «اخبار العلماء بأخبار الحكماء» یا «تاریخ الحكماء» از آن نام برده است.



تألیفات عبدالرحمن صوفی رازی

✦ رساله فی العمل بالاسطرلاب

خلاصه‌ای ۱۷۰ فصلی از کتاب ۱۷۶۰ فصلی از خودش است که برای ابوالفوارس شیردل بن عضدالدوله تألیف کرده است. اسطرلاب وسیله‌ای در نجوم رصدی است که شرح آن در کتاب‌های فراوانی آمده است.