

برهان دانش

و تفکر ریاضی

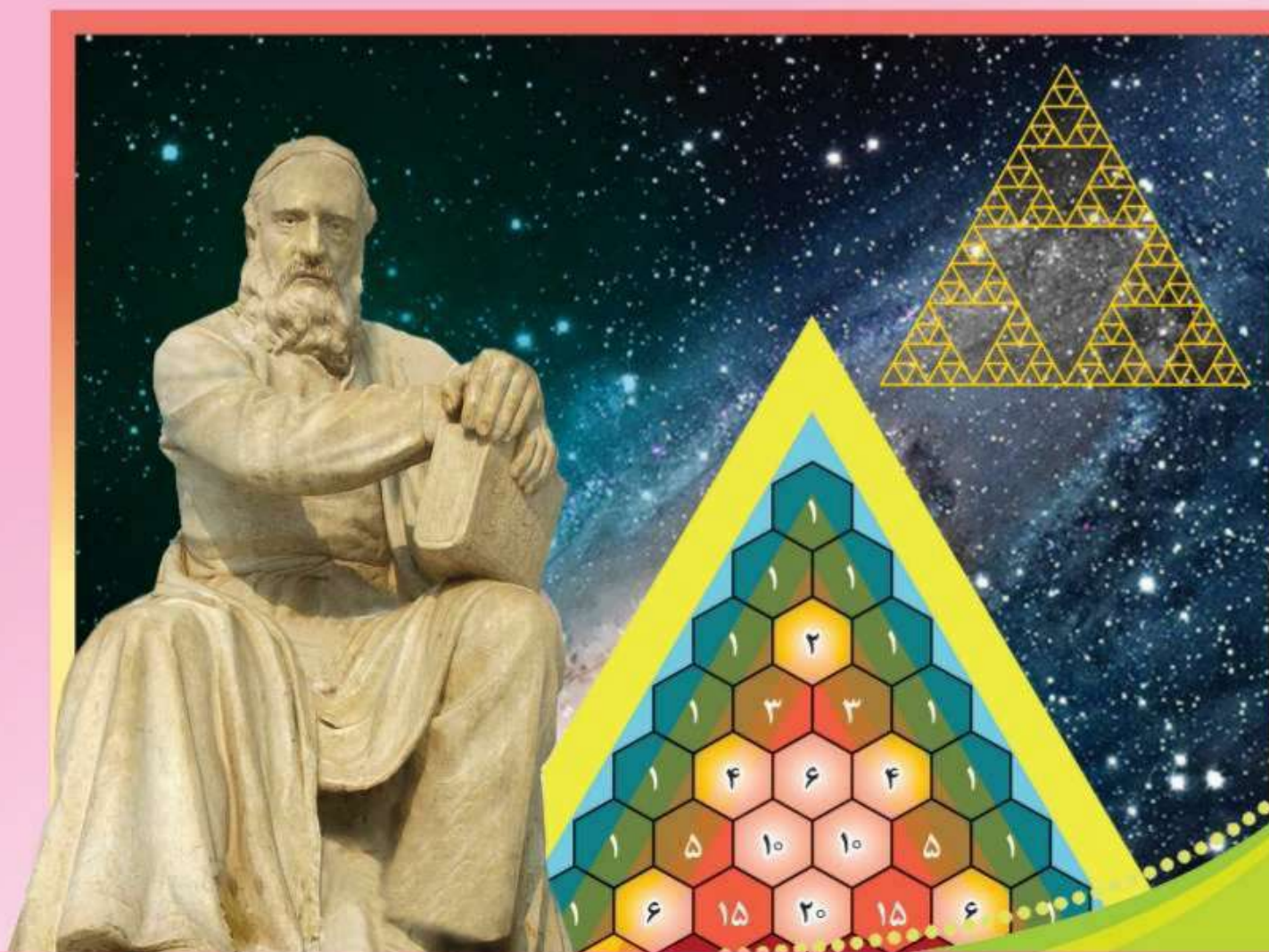
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

۷

شماره

دوره دوم ← تابستان ۱۴۰۳ ← ۴۸ صفحه ← بها: ۵۰,۰۰۰ تومان

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی



رایانامه: borhan.dtmath2@gmail.com

- مثالت خیام - پاسکال
- نوشتن را «جذبی» بگیرید؟
- داستان اعداد
- بحشی در باب قعنیه مورلی
- کاربرد ریاضی در مدیریت ریسک
- پرگار یک بار مصرف!
- مربع های جادویی مرلین

رسول اکرم (ص):
آن که دانشش کم است،
بهر از فرد نادانی است که
عبادتش بسیار است.

المحبة البيضاء / ص ۸۶

رسول اکرم (ص):
کسی که دوست دارد نگاهش به چهره
کسانی افتد که از آتش دوزخ در امان اند،
باید به متعلمان و دانشجویان بنکرد.

آداب تعلیم و تربیت / ص ۴۶

«آموزش و علم» در «آیات و احادیث»

امام علی (ع):
با آنچه نمی دانید دشمنی نکنید،
زیرا بیشتر علم
در چیزهایی است که نمی دانید.

غرر الحکم / ۱۰۲۴۶

رسول اکرم (ص):
در روز رستاخیز،
سعدسته شفاعت خواهند کرد: پیامبران،
پس از آن عالمان و سپس شهیدان.

المحبة البيضاء / ص ۷۹



برهان دانش و تفکر ریاضی



شماره:

دوره دوم ← تابستان ۱۴۰۳ ← ۴۸ صفحه ← بها: ۵۰,۰۰۰ تومان ← تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی



مجله ریاضی برهان دانش و تفکر ریاضی، از همه دبیران ریاضی، دانش آموزان و علاقه مندان به ریاضی در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کاربردی ریاضی (کاربرد در زندگی روزمره و علوم دیگر)
- نگارش مقاله های کمک آموزشی (منطبق با سرفصل های کتاب درسی ریاضی دوره متوسطه دوم)
- طرح معماها و جدول های ریاضی
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- نگارش مقاله های خواندنی ریاضی، مانند تاریخ ریاضیات، لطیفه های علمی و آموزشی و ...
- تهیه گزارش از مدارس موفق و مصاحبه با دبیران و دانش آموزان موفق.

لطفاً در مقاله های ارسال شده نکات زیر را در نظر بگیرید:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار دادن جدول ها، نمودارها و تصاویر پیوست و در حاشیه مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی شورای نویسندگان قرار گیرد و پس از تصویب مقاله، سفارش ترجمه به فرستنده مقاله داده خواهد شد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادله های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی نوشت ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحه مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از اثر و مقاله ارسال شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطالب ارسال شود.
- در مقاله های تحقیقی یا توصیفی، واژه های کلیدی در انتهای چکیده ذکر شود.

هم چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: حمیدرضا امیری □ شورای سردبیری: حمیدرضا امیری (دبیر شورا) / میرشهرام صدر / اکرم قابل رحمت
مدیر داخلی: میرشهرام صدر □ هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری / میرشهرام صدر / حسین کریمی / محمدحسن گورانی / محمدعلی فریبرز عراقی / اسحاق اسفندیار / اکرم قابل رحمت / لطافت امیری
مدیر هنری و طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی □ رسام: فرزانه پورسیفی
مدیر حروف نگاری: نغمه ارفعی زاده □ حروف نگاری: مهشید ابوالحسنی □ همکار اجرایی متن: فرناز براتی پور فرد
نشانی: خیابان انقلاب، نرسیده به چهارراه فلسطین، پلاک ۹۲۳، طبقه سوم □ تلفن: ۰۹۱۲۱۰۸۷۲۶۴ □ چاپخانه: چکاد
رایانامه: borhan.dtmath2@gmail.com □ ارتباط با ما: ble.ir/borhan_sadr

سخن دبیر شورا	حرف اول: نوشتن را «جذی» بگیرید؟	دبیر شورا	۲
آموزشی	در حاشیه مثلثات (۱): زاویه و مقیاس های اندازه گیری آن	حمیدرضا امیری	۳
واژگان ریاضی	ترکیب توابع (۱)	اکرم قابل رحمت	۹
ریاضیات کاربردی	کاربرد ریاضی در مدیریت ریسک	منصوره رسولی	۱۲
آموزشی	پرگار یک بار مصرف!	جلال سرحدی — ملیحه علوی زاده — حسین کریمی	۱۶
ریاضیات کاربردی	مربع های جادویی مرلین ... مسابقه کی مت، دانشگاه قم — انتخاب مقاله و خلاصه نویسی: محمدحسن گورانی		۲۱
آموزشی	آشنی با هندسه	محمدحسن گورانی	۲۶
آموزش ترجمه متون ریاضی فارسی به انگلیسی (۵)		حمیدرضا امیری	۳۰
مجموع جملات دنباله درجه دوم		مجید کریمی زاویه	۳۲
بحثی در باب قعنیه مولی		حسین کریمی	۳۵
تاریخ و فلسفه ریاضی	داستان اعداد (۳)	محمدحسن گورانی	۴۰
آموزشی	مثلث خیام — پاسکال	اکرم قابل رحمت	۴۲
تاریخ و فلسفه ریاضی	از گذشته های نه چندان دور (۶)	میرشهرام صدر	۴۶

حرف اول

نوشتن را «جدی» بگیرید؟

هوالطیف

سعی کنید آن را به صورت یک عادت در وجودتان نهادینه کنید؛ نوشتن را می‌گوییم. هر روز بنویسید، هر شب بنویسید، باور کنید نوشتن اعجاز می‌کند.

فراوند به قلم و هر آنچه می‌نویسد قسم خورده است. آرزوهای خودتان را بنویسید تا محقق شوند. شما هدفی را که می‌نویسید خلق خواهید کرد.

وقتی اهدافتان را می‌نویسید، با آن‌ها زندگی می‌کنید و از جایی که باور نمی‌کنید و شاید از مسیری که فکرش را هم نمی‌کرده‌اید، به آن‌ها دست می‌یابید.

دوستان خوبم، نوشتن را جدی بگیرید و این فرهنگ خوب را در خود ایجاد کنید.

در حدیثی کوربار، پیامبر اکرم (ص) فرمودند: «قید العلم بالكتابة» (بهار الانوار، ج ۵۸، ص ۱۲۴). یعنی با نوشتن، علم را به زنجیر بکشید (در اختیار بگیرید).

فرهنگ و عادت خوب نوشتن را در خودتان ایجاد کنید. بکوشید مطالبی را که یاد گرفته‌اید، و یا مهم هستند و باید به یاد بسپارید، به قلم خودتان، یعنی با زبان خودتان روی کاغذ بیاورید.

اگر تلاش کنید و خودتان را ملزم کنید به نوشتن، ماندگاری مطالب و دقت و تمرکز شما بیشتر می‌شود. مکتوب کردن مطالب باعث می‌شود قدرت حفظ کردن در شما تقویت شود.

به این روایت جالب دقت کنید:

«مردی نزد پیامبر از ناتوانی خود در حفظ کردن شکایت کرد. رسول خدا (ص) فرمودند: «استعن بيمينك» (الهيثي، نور الدين / مجمع الزوائد و منبع الفوائد / ج ۱، ص ۱۵۲): حفظ را با دست راست باری کن! یعنی، آنچه را می‌شنوی، بنویس.»

مؤید و پیروز باشیر

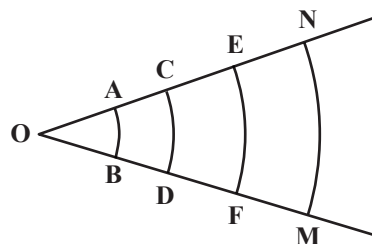
همیدرضا امیری
(دبیر شورای سر دبیری)

در حاشیهٔ مثلثات



قسمت اول

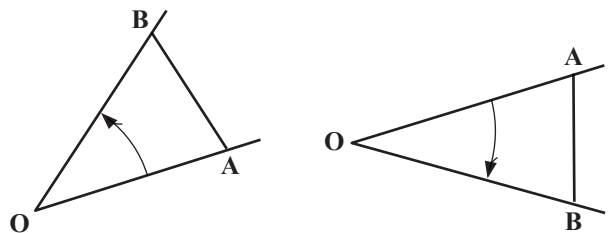
زاویه و مقیاس‌های اندازه‌گیری آن



شکل ۲

■ تعریف زاویه:

هر گاه نیم‌خطی مانند OA ، حول یکی از نقاطش دوران کند (برای راحتی نقطهٔ ابتدا یعنی O را در نظر می‌گیریم) تا به وضعیت جدید OB برسد (مطابق شکل ۱). آن قسمت از صفحه که باید نیم‌خط OA جاروب کند تا بر وضعیت ثانویه خود یعنی OB منطبق شود، زاویه بین OA و OB می‌نامیم. به‌طور کلی، زاویه از دوران یک نیم‌خط حول یکی از نقاطش حاصل می‌شود.



شکل ۱

با توجه به تعریف زاویه، واضح است که می‌توان زاویه‌ای چون $\angle MON$ را (مطابق شکل ۲) با هر یک از کمان‌های AB ، CD ، EF یا MN نمایش داد.

مقیاس‌های اندازه‌گیری زاویه (درجه، گراد، رادیان و اجزای آن‌ها - مسأله‌های حل شده)

الف. تعریف درجه و اجزای آن: هر گاه نیم‌خطی چون OA حول نقطهٔ O ، آن قدر دوران کند تا بر خودش منطبق شود، شکل حاصل یک دایره بوده و گوییم نیم‌خط OA یک دوران کامل انجام داده است. اگر این دوران کامل را (دایره را) به 360° قسمت تقسیم کنیم، اندازهٔ یک قسمت از این 360° قسمت را 1° درجه می‌نامیم. به عبارت دیگر، اندازهٔ زاویه‌ای در یک دایره را که اندازهٔ کمانِ روبه‌روی آن $\frac{1}{360}$ محیط دایره باشد، 1° درجه می‌نامیم.

ضرب و برای تبدیل اجزای کوچک‌تر به بزرگ‌تر، عمل تقسیم را انجام می‌دهیم.

مسئله ۲. اندازه زاویه β عبارت است از 100 گراد (gr)، 20 دسی‌گراد (dgr)، 44 سانتی‌گراد (cgr) و 12 میلی‌گراد (mgr)، اندازه این زاویه را:

الف) برحسب گراد، **ب)** برحسب دسی‌گراد، **ج)** برحسب سانتی‌گراد و **د)** برحسب میلی‌گراد محاسبه کنید.

$$\beta = 100_{\text{gr}} + \left(\frac{20}{100}\right)_{\text{gr}} + \left(\frac{44}{1000}\right)_{\text{gr}} + \left(\frac{12}{10000}\right)_{\text{gr}} = (102/452)_{\text{gr}}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \beta &= (100 \times 10)_{\text{dgr}} + 20_{\text{dgr}} \\ &+ \left(\frac{44}{10}\right)_{\text{dgr}} + \left(\frac{12}{100}\right)_{\text{dgr}} = (1024/52)_{\text{dgr}} \\ \beta &= (102/452)_{\text{gr}} \times 10 \\ &= 1024/52_{\text{dgr}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \beta &= (100 \times 100)_{\text{cgr}} + (40 \times 10)_{\text{cgr}} \\ &+ 44_{\text{cgr}} + \left(\frac{12}{10}\right)_{\text{cgr}} = (10245/2)_{\text{cgr}} \\ \beta &= (1024/52)_{\text{dgr}} \times 10 \\ &= 10245/2_{\text{cgr}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د) } \beta &= (100 \times 1000)_{\text{mgr}} + (20 \times 100)_{\text{mgr}} \\ &+ (44 \times 10)_{\text{mgr}} + 12_{\text{mgr}} = (102452)_{\text{mgr}} \\ \beta &= (10245/2)_{\text{cgr}} \times 10 \\ &= 102452_{\text{mgr}} \end{aligned}$$

ج. تعریف رادیان: دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA را در نظر می‌گیریم (شکل ۳). اگر شعاع OA آن‌قدر دوران کند تا اندازه کمان به‌دست آمده از این دوران (کمان AB) برابر با اندازه شعاع دایره، یعنی OA شود، اندازه زاویه روبه‌روی چنین کمانی را، یک رادیان می‌نامیم (۱ رادیان، اندازه زاویه‌ای است که اندازه کمان مقابل آن زاویه، برابر با شعاع دایره باشد).

اجزای درجه، عبارت است از: دقیقه و ثانیه که به‌ترتیب با نمادهای (') و (") نمایش می‌دهیم. هر درجه، 60 دقیقه و هر دقیقه 60 ثانیه است (مشابه رابطه ساعت و دقیقه و ثانیه).

برای تبدیل این اجزا به یکدیگر، به این صورت عمل می‌کنیم که اگر بخواهیم درجه را به دقیقه یا ثانیه، و یا دقیقه را به ثانیه تبدیل کنیم، عمل ضرب را انجام می‌دهیم و به‌عکس.

مسئله ۱. اندازه زاویه‌ای برابر است با $45''$ و $20'$ و 25° ، α ، اندازه این زاویه را:

الف) برحسب دقیقه، **ب)** برحسب ثانیه، **ج)** برحسب درجه محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \alpha &= (25^\circ \times 60) + 20' + \left(\frac{45}{60}\right)' = \\ &150' + 20' + \frac{3}{4}' = 170/75' \\ \alpha &= (25^\circ \times 3600) + (20' \times 60) + 45'' \\ &= 90000'' + 1200'' + 45'' = 91245'' \\ \alpha &= 25^\circ + \left(\frac{20}{60}\right)' + \left(\frac{45}{3600}\right)' \\ &= 25 + \frac{1}{3} + \frac{1}{80} = \frac{6083}{240} \end{aligned}$$

ب. تعریف گراد و اجزای آن: هرگاه نیم‌خطی چون OA

یک دوران کامل انجام دهد و این دوران کامل را به 400 قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازه هر قسمت از این اقسام را یک گراد می‌نامیم ($\frac{1}{400}$ از یک دوران کامل، 1 گراد نام دارد). به‌طور خلاصه، 1 گراد اندازه زاویه‌ای است که اندازه کمان روبه‌روی آن زاویه در دایره، $\frac{1}{400}$ اندازه محیط دایره است.

پرسش: اگر اندازه زاویه α یک درجه و اندازه زاویه β یک گراد باشد، کدام بزرگ‌ترند؟ اجزای گراد عبارت است از: دسی‌گراد، سانتی‌گراد و میلی‌گراد، که هر گراد 100 دسی‌گراد و هر دسی‌گراد 100 سانتی‌گراد (هر گراد 1000 سانتی‌گراد) و هر سانتی‌گراد 10 میلی‌گراد (هر گراد 10000 میلی‌گراد) می‌باشد. در این‌جا نیز برای تبدیل اجزای بزرگ‌تر و کوچک‌تر، عمل

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{AM}{36^\circ} \\
 a &= \frac{AM}{40^\circ} \\
 a &= \frac{AM}{2\pi} \\
 a &= \frac{2\pi L \times D}{36} \\
 a &= \frac{2\pi L \times G}{400} \Rightarrow \frac{2\pi L \times D}{36^\circ} = \frac{2\pi L \times G}{400} = \frac{2\pi L \times R}{2\pi} \\
 a &= \frac{2\pi L \times R}{2\pi} \\
 \Rightarrow \frac{D}{36^\circ} &= \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{D}{18^\circ} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}} \quad (1)
 \end{aligned}$$

🌟 **توجه ۱:** D را اندازه زاویه برحسب درجه می‌خوانیم و G را اندازه زاویه برحسب گراد و هیچ‌گاه D را درجه و G را گراد نمی‌خوانیم و همین‌طور R را.

🌟 **توجه ۲:** با توجه به دو نسبت اول رابطه (۱) داریم:

$$\frac{D}{18^\circ} = \frac{G}{200} \Rightarrow \boxed{\frac{D}{9} = \frac{G}{100}} \quad (2)$$

و فراموش نمی‌کنیم که از رابطه (۲) فقط و فقط برای تبدیل درجه و گراد به یکدیگر استفاده می‌کنیم و هر کجا که پای رادیان به میان کشیده شود، پای رابطه (۱) را باید به میان کشید!

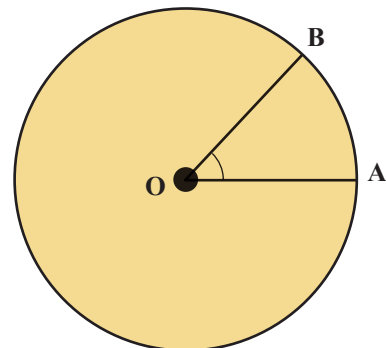
مسئله ۳. اندازه زاویه α عبارت است را $\alpha = 32/6^\circ_{gr}$ ، اندازه این زاویه را:

الف) برحسب درجه ب) برحسب رادیان، محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{9} = \frac{G}{100} &\Rightarrow \frac{D}{9} = \frac{32/6}{100} \Rightarrow 10D = 293/4 \\
 \Rightarrow D &= 29/34
 \end{aligned}$$

حال $29/34^\circ$ را به دقیقه و ثانیه تبدیل می‌کنیم:

$$29/34^\circ = 0/34 \times 60 = (20/4)'$$



شکل ۳

$$\widehat{AB} = \widehat{OA} \Rightarrow \angle AOB = 1 \text{ رادیان}$$

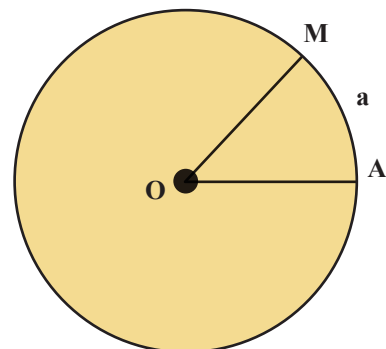
برای محاسبه اندازه محیط دایره برحسب رادیان، کافی است محیط دایره را به اندازه کمانی که زاویه روبه‌رو به آن ۱ رادیان است، تقسیم کنیم، در این صورت، اگر شعاع دایره را L بنامیم، خواهیم داشت:

$$\text{اندازه محیط دایره} = \frac{\text{اندازه طول کمانی برابر با کمانی}}{\text{برحسب رادیان}} = \frac{2\pi L}{L} = 2\pi$$

تبصره: با توجه به تعاریف درجه، گراد و رادیان، اندازه محیط دایره عبارت است از: 360° درجه یا 400° گراد یا 2π رادیان.

■ رابطه تبدیل مقیاس‌های اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر - مسأله‌های حل شده

دایره‌ای به مرکز O و به شعاع L را در نظر می‌گیریم، اگر طول کمان AM را مطابق شکل (۴) a بنامیم، خواهیم داشت:



شکل ۴

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{D\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D^2 = 900 \Rightarrow D = \pm 30$$

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow \frac{\pm 30}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow 9G = \pm 300$$

$$\Rightarrow G = \pm 33 \frac{1}{3}$$

از طرفی:

🔴 **توجه بسیار مهم:** همان طور که در مسائل گذشته مشاهده کردید، ما هیچ گاه D را به معنای درجه در نظر نگرفته ایم یا G را به معنای گراد یا R را به معنای رادیان؛ بلکه D یعنی اندازه زاویه ای برحسب درجه، G یعنی اندازه زاویه ای برحسب گراد و R یعنی اندازه زاویه برحسب رادیان، که توجه به این نکته، کمک قابل توجهی در حل مسائل می کند.

مسئله ۶. در مثلث ABC ، اندازه زاویه $\hat{A} = 80^\circ$ و اندازه

زاویه C برحسب گراد $\frac{5}{3}$ اندازه زاویه B است، برحسب درجه، ثابت کنید مثلث ABC متساوی الساقین است.

$$\hat{C}_{gr} = \frac{5}{3} \hat{B}^\circ \quad \text{طبق فرض داریم}$$

$$\hat{A} = 80^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 100^\circ \quad (1)$$

حال اندازه زاویه $\hat{C}$ را که برحسب گراد داریم، برحسب درجه به دست می آوریم تا رابطه دیگری بین زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برحسب درجه به دست آید و با توجه به رابطه (۱) دو معادله دو مجهول به دست آید.

$$\text{داریم: } \frac{D}{9} = \frac{G}{10} \xrightarrow{\hat{C}_{gr} = \frac{5}{3} \hat{B}^\circ} \frac{D}{9} = \frac{\frac{5}{3} \hat{B}}{10}$$

$$\Rightarrow 10D = \frac{45}{3} \hat{B}$$

$$\Rightarrow D = \frac{45}{30} \hat{B} \Rightarrow D = \frac{15}{10} \hat{B}$$

$$(اندازه زاویه C برحسب درجه) \Rightarrow \hat{C}^\circ = \frac{15}{10} \hat{B}^\circ$$

طبق رابطه (۱) داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \frac{15}{10} \hat{B} = 100$$

و حالا 40° را به ثانیه تبدیل می کنیم:

$$40^\circ = 40' \times 60 = 2400''$$

پس اندازه زاویه α برحسب درجه، یعنی D ، برابر است با:

$$\alpha = 29^\circ, 20', 24''$$

(ب) طبق رابطه تبدیل داریم:

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{32/6}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\Rightarrow 32/6\pi = 200R \Rightarrow R = 0/163\pi$$

$$\alpha = 0/163\pi \text{ رادیان}$$

مسئله ۴. اگر $1/2$ برابر اندازه زاویه ای برحسب گراد را به اندازه همان زاویه، برحسب درجه اضافه کنیم، عدد ۴۵ به دست می آید. اندازه زاویه را برحسب رادیان محاسبه کنید.

$$\Rightarrow 2/1 G + D = 45 \quad \text{طبق فرض مسئله داریم}$$

$$D = 45 - 2/1 G \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10} \xrightarrow{(1)} \frac{45 - 2/1 G}{9} = \frac{G}{10}$$

(دو مجهول را به یک مجهول تبدیل کردیم.)

$$\Rightarrow 450 - 21G = 9G \Rightarrow$$

$$30G = 450 \Rightarrow G = 15$$

و نیز داریم:

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{15}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\Rightarrow R = \frac{15}{200} \pi \Rightarrow R = \frac{3}{40} \pi \text{ (اندازه زاویه برحسب رادیان)}$$

مسئله ۵. اندازه زاویه ای برحسب رادیان، برابر است با حاصل

تقسیم 5π بر اندازه همان زاویه برحسب درجه، اندازه این زاویه را برحسب گراد محاسبه کنید:

طبق فرض داریم:

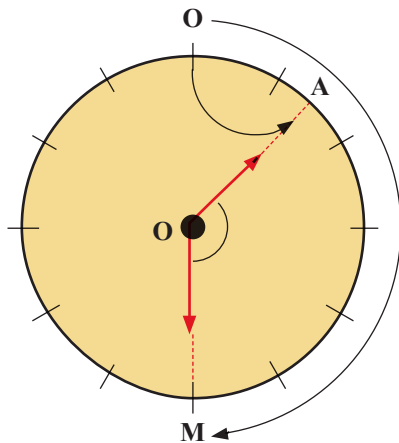
$$R = \frac{5\pi}{D}$$

از طرفی طبق رابطه تبدیل داریم:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \xrightarrow{R = \frac{5\pi}{D}} \frac{\frac{5\pi}{D}}{\pi} = \frac{D}{180}$$

(این روش با ذکر مثالی توضیح داده می شود).

مطابق (شکل ۵) مثلاً زاویه بین عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت ۱/۵ را با توجه به تعریف زاویه، می توان با کمان AM نمایش داد که این کمان از تفاضل کمان OA از کمان OM به دست می آید؛ یعنی: محاسبه این زاویه مستلزم محاسبه کمان OA که همان انحراف عقربه ساعت شمار است و محاسبه کمان OM که انحراف عقربه دقیقه شمار است، می باشد. انحراف این عقربه ها را در حالت کلی، به ازای گذشت هر دقیقه بررسی می کنیم؛ با توجه به این که صفحه ساعت، دایره و 36° است و نیز به ۱۲ قسمت تقسیم شده، هر قسمت یعنی: فاصله هر عدد با عدد بعدی $\frac{36^\circ}{12} = 3^\circ$ می باشد، پس:



شکل ۵

دقیقه	عقربه دقیقه شمار
۶۰	3°
۱	$x = 0/5$

(عقربه ساعت شمار، هر یک دقیقه، $0/5$ درجه منحرف می شود)

دقیقه	عقربه دقیقه شمار
۵۰	3°
۱	$x = 6$

(عقربه ساعت شمار، هر یک دقیقه، ۶ درجه منحرف می شود)

$$\Rightarrow \frac{25}{10} \hat{B} = 100 \Rightarrow 25 \hat{B} = 1000$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 8^\circ \text{ و چون } \hat{A} = 8^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 8^\circ$$

پس مثلث متساوی الساقین است.

مسئله ۷.

چه زاویه ای است، اگر حاصل ضرب 900π در تفاضل عکس اندازه های آن بر حسب درجه و گراد، برابر با دو برابر اندازه آن بر حسب رادیان باشد؟

طبق فرض داریم:

$$900\pi \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{G} \right) = 2R$$

این معادله دارای ۳ مجهول است؛ ابتدا با استفاده از رابطه

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10}, \text{ معادله را به ۲ مجهول تبدیل می کنیم:}$$

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow 10D = 9G \Rightarrow D = \frac{9}{10}G$$

$$\Rightarrow 900\pi \left(\frac{1}{\frac{9}{10}G} - \frac{1}{G} \right) = 2R$$

$$\Rightarrow 900\pi \left(\frac{10}{9G} - \frac{1}{G} \right) = 2R$$

$$\Rightarrow 900\pi \left(\frac{1}{9G} \right) = 2R \Rightarrow \frac{100\pi}{G} = 2R \Rightarrow R = \frac{100\pi}{2G}$$

$$R = \frac{50\pi}{G} \text{ پس } \boxed{R = \frac{50\pi}{G}}$$

از طرفی داریم:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \Rightarrow \frac{\frac{50\pi}{G}}{\pi} = \frac{G}{200}$$

$$\Rightarrow \frac{50\pi}{G\pi} = \frac{G}{200} \Rightarrow G^2 = 10000$$

$$\Rightarrow G = 100 \text{ گراد}$$

$$\alpha = 100^\circ \text{ gr} \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\text{rad}}$$

تعیین زاویه های بین عقربه های ساعت در ساعت های مختلف - مسئله های حل شده

صفحه ساعت را دایره شکل فرض می کنیم و برای محاسبه بین عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار، به صورت زیر عمل می کنیم:

تبصره: با توجه به این که عقربه ثانیه‌شمار، فاصله هر دو عدد متوالی ساعت را در مدت ۵ ثانیه طی می‌کند، داریم:

ثانیه	
۵۰	۳۰°
۱	X = ۶

یعنی عقربه ثانیه‌شمار، هر یک ثانیه، ۶ درجه منحرف می‌شود؛ بنابراین، با همان روش بالا و با محاسبه انحراف عقربه ثانیه‌شمار، می‌توان زاویه بین این عقربه و دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار را نیز به‌دست آورد.

تذکره ۱: عقربه دقیقه‌شمار، فاصله ۲ عدد متوالی ساعت؛ یعنی ۳۰° را در ۵ دقیقه و ساعت‌شمار را در ۱ ساعت یا ۶۰ دقیقه طی می‌کند، که از این مطالب، در تناسب‌های فوق استفاده شده است.

تذکره ۲: برای محاسبه انحراف عقربه دقیقه‌شمار، فقط دقیقه‌های وقت مورد نظر را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم و برای محاسبه انحراف عقربه ساعت‌شمار، ساعت و دقیقه وقت مورد نظر را به دقیقه تبدیل کرده و در ۰/۵ ضرب می‌کنیم. مثلاً در مورد یافتن زاویه عقربه‌های ساعت در همان ساعت ۱/۵ (شکل ۵) داریم:

$$\begin{aligned}\text{انحراف دقیقه‌شمار} &= 30 \times 6 = 180^\circ \\ \text{انحراف ساعت‌شمار} &= [(1 \times 60) + 30] \times 0.5 = 90 \times 0.5 = 45^\circ \\ \text{زاویه بین دو عقربه} &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

ادب ریاضی

ترجمه داوید هیلبرت

مشهور است که زرگر متقلبی، که بنا بود تاجی از طلا برای هیرون بسازد، مقداری نقره در آن وارد کرده بود و پادشاه که تقلب صنعتگر را حدس زده بود، از ارشمیدس خواست که درباره حل این مسأله راه چاره‌ای بیابد.

امروزه هر محصل مدرسه متوسطه می‌داند، که چه‌گونه می‌تواند با تجربه‌ای ساده و با حساب مختصری درباره وزن مخصوص‌ها این مسأله را حل کند و نیز همه مبتدیان جوان و مهندسان بحرپیمایی و کشتی‌سازی موارد استعمال بی‌شمار قانونی را که به اصل ارشمیدس معروف است می‌دانند. اما مردی که برای اولین بار توانست از تجربه‌ای عادی چنین قانونی را نتیجه بگیرد، در مقامی مطلقاً مافوق مشاهده‌کنندگان عادی قرار داشته است.

از این نکته اطلاعی نداریم که بالاخره زرگر را مقصر شناختند یا نه، اما به اتکای افسانه مزبور معمولاً به این سؤال پاسخ مثبت داده می‌شود.

مسأله ۸. در ساعت ۳ و ۳۵ دقیقه و ۴۵ ثانیه، زاویه بین عقربه‌های ساعت و دقیقه‌شمار را حساب کنید.

برای حل مسأله، ابتدا ثانیه را به دقیقه تبدیل کرده و با دقیقه‌های وقت مورد نظر جمع می‌کنیم:

$$45 = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{ثانیه}$$

$$\text{دقیقه} = 35 + \frac{3}{4} = \frac{143}{4}$$

$$\text{انحراف دقیقه‌شمار} = \frac{143}{4} \times 6 = \frac{429}{2}$$

$$\text{انحراف ساعت‌شمار} = \left[(3 \times 60) + \frac{143}{4} \right] \times 0.5$$

$$= (180 + \frac{143}{4}) \times \frac{1}{2} = (\frac{863}{4}) \times \frac{1}{2} = \frac{863}{8} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\text{زاویه بین ۲ عقربه} &= \frac{429}{2} - \frac{863}{8} = \frac{1716 - 863}{8} \\ &= (\frac{853}{8})^\circ\end{aligned}$$



مقدمه: دانش آموزان در سال‌های یازدهم و دوازدهم ترکیب توابع را می‌خوانند که از مباحث بسیار مهم است ولی متأسفانه نسبت به این درس احساس خوشایندی ندارند. به نظر من یکی از دلایلی این می‌تواند باشد که با مفهوم و کاربرد آن آشنایی ندارند و این درس را در قالب فرمول می‌بینند. به همین دلیل لازم دانستم که برای این مطلب ابتدا چند مثال کاربردی بزنم.

◀ مثال ۳. در کشاورزی:

۱. تعداد دانه‌های خوشه گندم تابعی از میزان کوددهی گیاه است.
۲. میزان برداشت گندم تابعی از میزان تعداد دانه‌های هر خوشه گندم است.

بنابراین: میزان برداشت گندم تابعی از میزان کوددهی است.



◀ مثال ۴. در هندسه:

۱. حجم کره تابعی از شعاع آن است.
 ۱. مساحت کره تابعی از حجم آن است.
- بنابراین: مساحت کره تابعی از شعاع کره است.

◀ مثال ۱. در زندگی (اقتصاد):

۱. میزان درآمد تابعی از ساعت کار فرد می‌باشد.
 ۲. میزان هزینه تابعی از درآمد فرد می‌باشد.
- بنابراین: میزان هزینه فرد تابعی از ساعت کار او می‌باشد.



◀ مثال ۲. در فیزیک:

۱. مسافت طی شده توسط یک متحرک تابعی از زمان است.
 ۲. سرعت متحرک تابعی از مسافت است.
- بنابراین: سرعت متحرک تابعی از زمان است.



به طور کلی:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 2(x^3)$$

مثال ۳

$$\begin{aligned} \text{شعاع کره } r &\xrightarrow{V} \frac{4}{3}\pi r^3 \xrightarrow{S} 4\pi r^2 \xrightarrow{f} 4\pi \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2 \\ 1 &\rightarrow \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi \rightarrow 4\pi \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 = \frac{64\pi^2}{3} \\ (sof)(1) &= s(v(1)) = s\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 4\pi \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 = \frac{64\pi^2}{3} \end{aligned}$$

تذکره: می توان یک تابع را با خودش ترکیب کرد.

مثال ۴

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{f} \frac{x}{2} \xrightarrow{f} \frac{x}{4} \\ 18 &\xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$(fof)(18) = f(f(18)) = f(9) = \frac{9}{2}$$

$$(fof)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{4}$$

به طور کلی:

تذکره: می توان دو یا سه یا n تابع را ترکیب کرد.

مثال ۵

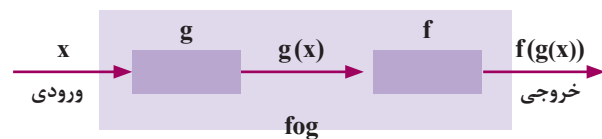
$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{f} \text{دو برابر} \xrightarrow{g} \text{منهای ۳} \xrightarrow{h} \text{مکعب} \\ 1 &\xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 2-3 = -1 \xrightarrow{h} (-1)^3 = -1 \\ 5 &\xrightarrow{f} 10 \xrightarrow{g} 10-3 = 7 \xrightarrow{h} 7^3 = 343 \\ (hogof)(1) &= h(g(f(1))) = h(g(2)) \\ &= h(-1) = (-1)^3 = -1 \\ (hogof)(5) &= h(g(f(5))) = h(g(10)) \\ &= h(7) = 7^3 = 343 \end{aligned}$$



[شما می توانید در علوم دیگر نیز مثال هایی ارائه دهید.]

همان طور که ملاحظه کردید در این مثال ها صحبت از دو تابع شده است حال در حالت کلی این مثال ها را در قالب ریاضی طرح می کنیم.

تعریف: دو تابع f و g را در نظر می گیریم که $R_g \subseteq D_f$ نمودار زیر شبیه سازی مثال های بالا است.



ماشین بالا را در نظر بگیرید که ماشین های f و g را ترکیب می کند و محصول به ازای x برابر $f(g(x))$ می شود. اگر این ماشین را h بنامیم این ماشین را با نماد fof نشان می دهیم که $h(x) = f(g(x))$. برای درک بهتر مطلب به مثال های زیر توجه کنید.

مثال ۱

$$g(\text{ورودی}) = 3 + (\text{ورودی})$$

$$f(\text{ورودی}) = 3 \times (\text{ورودی})$$

$$3 \xrightarrow{g} (3 \times 3) + 1 = 10 \xrightarrow{f} 10^3$$

$$2 \rightarrow 3(2) + 1 = 7 \xrightarrow{f} 7^3$$

$$x \xrightarrow{g} 1 + 3x \xrightarrow{f} (3x + 1)^3$$

مثال ۲

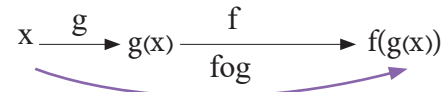
$$x \xrightarrow{f} \text{مکعب} \xrightarrow{g} \text{دو برابر} \xrightarrow{\text{خروجی}} 2x^3$$

$$5 \xrightarrow{f} 125 \xrightarrow{g} 2 \times 125 = 250$$

$$(gof)(5) = g(f(5)) = g(125) = 2 \times 125 = 250$$

اکنون آمادگی داریم که تعاریف را ارائه دهیم.

● **تعریف:** اگر f و g دو تابع باشند تابع $f \circ g$ را به شرطی که $R_g \subseteq D_f$ باشد به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

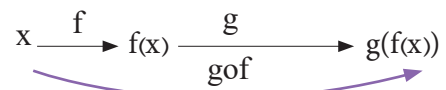


* اگر شرط $R_g \subseteq D_f$ برقرار نباشد $f \circ g$ تشکیل نمی‌شود.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

● **تعریف:** اگر f و g دو تابع باشند تابع $g \circ f$ را به شرطی که $R_f \subseteq D_g$ باشد به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

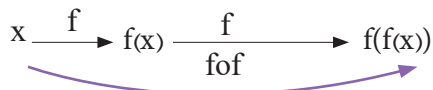


* اگر شرط $R_f \subseteq D_g$ برقرار نباشد $g \circ f$ تشکیل نمی‌شود.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

● **تعریف:** f تابع باشد $f \circ f$ را به شرطی که $R_f \subseteq D_f$ باشد به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



اگر $R_f \subseteq D_f$ نباشد $f \circ f$ تشکیل نمی‌شود.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

دانش‌آموز عزیز به دلیل مفصل بودن مطلب مثال‌های مرتبط به این بحث در شماره آینده ارائه خواهد گردید.

ادب ریاضی

از کتاب ریاضی دانان نامی، ترجمه حسن صفاری

..... نامه لاپلاس در ۲۸ سالگی به دالامبر

من همواره به اقتضای ذوق خویش به مطالعه در ریاضیات پرداخته‌ام و نه به علت تمایل به شهرت‌های بی‌حاصل که اصلاً توجهی به آنها ندارم. بزرگترین تفریح من آن است که خط سیر مخترعان را تعقیب کنم و نبوغ آنان را به هنگام مواجهه با موانع مشاهده نمایم و موانعی که آنان در سر راه خویش دیدند و توانستند از آنها بگذرند در نظر آورم.

در چنین موردی سعی می‌کنم خویشتن را به جای ایشان قرار دهم و این مسأله را مطرح سازم که در چنین مقامی من خود برای عبور از این موانع چه می‌کرده‌ام و با وجود آن که در غالب موارد این جانشینی موجب توقف من می‌گردد و برای من حسرت و خفت ایجاد می‌کند ولی بر عزت نفس خود غلبه می‌کنم و این مختصر خفت را با لذت استفاده از توفیق آنان با شایسته‌ترین وضع جبران می‌سازم. در موارد معدودی که اقبال یا من یاری می‌کند و موفق می‌شوم که چیزی بر آثار آنان بیفزایم همه لیاقت این توفیق را به اولین کوشش‌های آنها نسبت می‌دهم و خویشتن را قانع می‌سازم که اگر آنان در وضع من قرار داشتند خیلی بیشتر از آن می‌رفتند که من رفته‌ام.

کاربرد ریاضی در مدیریت ریسک



چکیده: برای شروع هر کسب و کاری نیاز است تا در ابتدا ریسک‌ها و موانع آن ارزیابی شود. این موضوع برای کسب و کارهایی که قصد گسترش فعالیت‌های اقتصادی خود را دارند نیز صادق است. بنابراین برای اینکه شرکت‌ها بتوانند میزان ریسک‌های موجود در فعالیت اقتصادی را ارزیابی کنند، باید اقداماتی را برای کنترل و کاهش ریسک انجام دهند که به آن مدیریت ریسک می‌گویند. با توجه به اینکه همواره احتمال ایجاد ریسک‌های جدید وجود دارد، بنابراین شرکت‌ها همواره به مدیریت ریسک نیاز دارند. در واقع مدیریت ریسک به زبان ساده، برنامه‌ریزی برای انجام اقداماتی است که از خطرات و تهدیدات احتمالی جلوگیری می‌کند. برای مثال زمانی که برای اجتناب از خیس شدن زیر باران، چتر خود را همراه می‌برید، این اقدام نوعی مدیریت ریسک است که از خیس شدن شما جلوگیری می‌کند. برای مدیریت ریسک در ابتدا نیاز است تا ریسک‌ها را شناسایی و از لحاظ اهمیت، آن‌ها را دسته‌بندی کنیم. سپس با توجه به برنامه‌ریزی‌های انجام شده، اقدامات لازم را انجام دهیم. در این مقاله اشاره‌ای به ارتباط ریاضی با موضوع ریسک می‌نماییم.

تکنیک‌های مدیریت ریسک

وقوع مشکلات مختلف، آسیب‌های مربوطه را به حداقل برسانند.

کاهش ریسک: اقدام دیگری که شرکت‌ها و افراد در برخورد با ریسک می‌توانند انجام دهند، کاهش ریسک مربوطه است. شرکت‌ها می‌توانند با انجام اقداماتی، احتمال وقوع رویدادهای مشکل‌زا را کاهش دهند تا به این ترتیب بتوانند ریسک را کم کنند.

تقسیم ریسک: در این تکنیک تعداد دو یا بیشتر از شرکت‌ها ریسک مربوطه را پوشش می‌دهند. بنابراین با توجه به مدیریت ریسک توسط شرکت‌های متخصص در حوزه مربوطه میزان ریسک به نحو بهتری مدیریت می‌شود.

با توجه به استراتژی‌ها و اهداف تعیین شده، شرکت‌ها ممکن است به طرق مختلفی با ریسک‌های موجود برخورد کنند که عبارتند از:

پرهیز از ریسک: شرکت‌ها ممکن است از ریسک مورد نظر پرهیز کنند و عوامل به وجود آورنده آن را از بین ببرند.

پذیرش ریسک: در مواردی هم افراد و شرکت‌ها ریسک را می‌پذیرند. در این حالت دارایی‌های شرکت باید به گونه‌ای باشد تا بتواند اثرات ریسک مربوطه را کاهش دهد و در صورت بروز مشکلات بتواند آسیب‌های وارده را جبران کند. از سویی دیگر برای پذیرش ریسک، شرکت‌ها احتمالاتی را فرض می‌کنند تا بتوانند در صورت

ریسک عملیاتی یکی از مهم‌ترین ریسک‌هایی است که بانک‌ها با آن مواجهند و تقریباً ۱۵ تا ۲۵ درصد از کل سرمایه در بسیاری از بانک‌های بزرگ از جمله HSBC به آن تخصیص یافته است. به‌طور معمول، ریسک عملیاتی پس از ریسک اعتباری بزرگ‌ترین ریسک از نظر شدت و زیان برای بانک‌ها است. مدیریت ریسک عملیاتی به دلایل مختلف در کسب و کار در حال افزایش است و باید به‌طور دائم شناسایی، پایش، کنترل، اندازه‌گیری و مدیریت شود.

کمیته بال چه وظایفی دارد؟

فعال‌ترین نهاد بین‌المللی درگیر نظارت بانکی، کمیته بال (بازل) است. این کمیته مرکب است از نمایندگان ارشد بانک‌های مرکزی تعدادی از کشورهای عمده صنعتی دنیا از جمله: آلمان، انگلستان، ایتالیا، فرانسه، آمریکا، سوئیس، سوئد، ژاپن، کانادا و لوکزامبورگ است. دبیرخانه دائمی این کمیته در شهر بازل سوئیس تشکیل می‌گردد. به دلیل تشکیل جلسات مذکور در شهر بازل این کمیته به کمیته بازل معروف شده است. کمیته بازل دارای قدرت قانونی نیست، اما اکثر کشورهای عضو بطور ضمنی موظف به اجرای توصیه‌های آن هستند.

اقدامات مهم کمیته بال: از مهم‌ترین اقدامات کمیته

بال تهیه و انتشار اصول پایه در نظارت بانکی کارآ و مؤثر و همچنین مقررات مربوط به کفایت سرمایه است. در حال حاضر شیوه نظارت بر بانک‌ها در جهان از نظارت تطبیقی به نظارت مبتنی بر ریسک تغییر یافته است. بدین لحاظ بانک‌های مرکزی بازرسی و نظارت‌های مستقیم خود بر بانک‌ها را با استفاده از بررسی گزارش‌های مبتنی بر نظارت غیرحضوری اعمال می‌کنند.

کفایت سرمایه: سرمایه رکن مهمی از پشتوانه مالی

هر بانک است که بانک را قادر می‌سازد هنگام رویارویی با مشکلات اقتصادی توانایی بازپرداخت بدهی خود را داشته باشد. سرمایه علاوه بر آنکه نقش مهمی در ثبات مالی بانک‌ها و انگیزه‌های ریسک‌پذیری ایفا می‌کند، در ایجاد رقابت مثبت میان بانک‌ها نیز بسیار مؤثر است. از آنجا که تضمین نگهداری وجوه و منابع سرمایه‌ای معتبر موجب کاهش ریسک سپرده‌گذاران بانک‌ها می‌گردد، لذا یکی از شاخص‌های مهم ارزیابی بانک‌ها «نسبت کفایت» سرمایه است. این نسبت اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط کمیته بال به بانک‌های

انتقال ریسک: در این تکنیک شرکت مربوطه پس از

شناسایی ریسک آن را به شرکت‌های دیگری انتقال می‌دهد. این شرکت‌ها با توجه به اهداف کاری مربوطه موظف هستند موارد مربوط به پوشش ریسک را انجام دهند.

محدود کردن ریسک: در برخی موارد شرکت‌ها با توجه

به نوع ریسک‌های موجود سعی می‌کنند با محدود کردن ریسک مدیریت بهینه‌ای را در حوزه مربوطه انجام دهند. در این حالت شرکت‌ها با انجام تکنیک‌هایی سعی می‌کنند از گسترش ریسک به حوزه‌های دیگر جلوگیری کنند.

شکل زیر توصیفی از ریسک را نشان می‌دهد.



ریسک عملیاتی

ریسک عملیاتی یکی از ریسک‌های شناسایی شده در سازمان‌ها بالاخص در بانک‌ها است که دامنه گسترده‌ای داشته و ناشی از خطاهای موجود در عملکرد فردی و یا نقص سیستم یا مشکلات فرآیندی می‌باشد و کمیته بال که در ادامه معرفی خواهد شد توجه ویژه‌ای به آن دارد. فرایند معمول مدیریت ریسک عملیاتی را می‌توان به ۵ گام بنیادین تقسیم کرد که در شکل زیر آمده است:



زندگی امروز در حالی ادامه می‌یابد که شرایط عدم اطمینان بر کلیه امور سایه انداخته و فرآیند تصمیم‌گیری را متحول کرده است. تغییرات قیمت کالاهای اساسی، تغییرات نرخ ارز، تغییرات نرخ سود و همچنین تغییرات قیمت سهام مواردی هستند که سازمان‌های امروزی دائماً با آن دست به گریباند.

دنیا معرفی گردید. کمیته بال در آن سال مجموعه‌ای از شروط حداقل سرمایه را به بانک‌ها پیشنهاد کرد که بعدها به «پیمان بال» معروف شد.

نسبت کفایت سرمایه عبارت است از: نسبت سرمایه بانک به دارایی‌های توام با ریسک آن که نباید از ۸ درصد کمتر باشد.

ریسک عملیاتی و کمبود داده: بانک‌ها تمایل دارند

که از رویکرد توزیع زیان به منظور محاسبه ریسک عملیاتی استفاده نمایند. اما به منظور استفاده از این روش با دو چالش مهم روبه‌رو هستند که عبارتند از کمبود داده‌های زیان عملیاتی و تمرکز رویکرد توزیع زیان بر استفاده از داده‌های تاریخی، کمبود داده‌های زیان داخلی بانک باعث می‌شود تا نتایج حاصل از استفاده از نمونه‌های کوچک کارایی لازم و نیز توان تبیین صحیح نتایج مورد انتظار را نداشته باشد. به بیان دیگر، سرمایه پوششی خروجی مدل‌های به کار گرفته شده به شدت متلاطم و غیرقابل اعتماد هستند به گونه‌ای که مدل‌های آماری استفاده شده را نمی‌توان برای نمونه‌های خیلی کوچک مورد آزمون قرار داد. این مسئله به‌خصوص در داده‌های با فراوانی کم/ شدت زیاد بیشتر رخ می‌دهد. زمانی که برای این دسته از داده‌ها، تعداد داده موجود در پایگاه داده زیان، به اندازه کافی نباشد عملاً استفاده از روش‌های آماری رویکرد توزیع زیان امکان‌پذیر نخواهد بود. از طرف دیگر بانک‌ها تمایل دارند که علاوه بر محاسبه ریسک عملیاتی براساس داده‌های تاریخی، یک نگاه آینده‌نگر در محاسبه

ریسک عملیاتی داشته باشند. به عبارت دیگر بانک‌ها تمایل دارند سرمایه مورد نیاز ریسک عملیاتی را برای ریسک‌هایی که شناسایی شده ولی مبالغ زیان آن‌ها هنوز محقق نگردیده و تنها مقدار آن‌ها به صورت پیش‌بینی می‌باشد، محاسبه نمایند.

راه‌حلی که برای این مسئله ارائه گردیده است، استفاده از چهار منبع داده‌ای برای مدل‌سازی ریسک عملیاتی در هنگام استفاده از رویکرد توزیع زیان می‌باشد که عبارتند از داده‌های زیان داخلی، داده‌های زیان خارجی، تحلیل

سناریو (نظرات کارشناسان)، عوامل کنترل‌های داخلی و محیط کسب و کار.

منظور از داده‌های زیان داخلی، داده‌های درون سازمانی ریسک عملیاتی می‌باشد که بانک اقدام به جمع‌آوری آن‌ها می‌نماید ولی داده‌های زیان خارجی مربوط به سایر بانک‌ها و مؤسسات مالی می‌باشد.

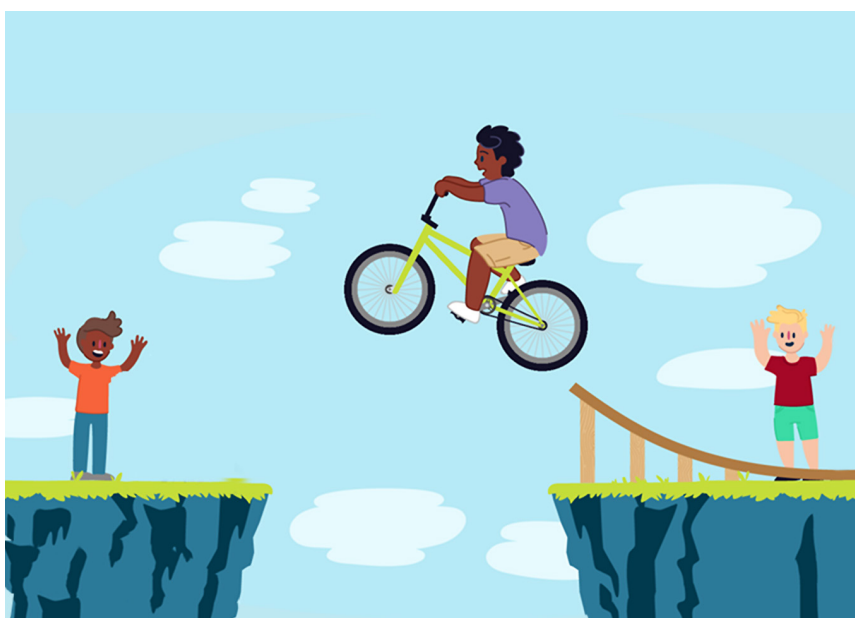
احتمال ریسک عملیاتی: با کاهش احتمال وقوع

رویدادهای ریسک، می‌توان زیان‌های ناشی از ریسک‌های عملیاتی را کاهش داد و از این طریق آسیب‌پذیری بانک را نسبت به حوادث مذکور به حداقل ممکن رساند. از آنجا که ارزش زیان مورد انتظار مطابق رابطه زیر نتیجه حاصلضرب دو عامل احتمال وقوع ریسک عملیاتی و خسارت ناشی از وقوع یا تأثیر ریسک است تقلیل هر یک از این دو عامل می‌تواند به کاهش ارزش زیان مورد انتظار بیانجامد.

ارزش زیان مورد انتظار =

احتمال وقوع ریسک عملیاتی × خسارت ناشی از وقوع با تأثیر ریسک

از این‌رو در ارزیابی ریسک‌های عملیاتی، احتمال وقوع رویدادهای ریسک و خسارت ناشی از آن‌ها توسط واحدهای کاری محاسبه می‌شود.



■ محاسبه ذخیره ریسک

گاهی اوقات برای دستیابی به احتمال بقای سازمان تا حد مطلوب، محاسبه میزان ذخیره ریسک ضروری است. به عنوان مثال، یک سازمان باید بداند به چه میزان ذخیره ریسک نیاز دارد تا بتواند در پنج سال آینده احتمال بقایی^۱ مشابه سال جاری داشته باشد و از آنجا که ذخیره ریسک مطابق قوانین بال یک مقدار ثابت از سرمایه بانک است، بنابراین این موضوع تأثیر زیادی بر نحوه عملکرد سازمان دارد.

برای محاسبه احتمال بقای سازمان از میزان ذخیره ریسک استفاده می‌شود. ذخیره ریسک هم ضریب ثابتی از میزان سرمایه همان سازمان یا بانک است. رابطه ریاضی بین احتمال بقا و ذخیره ریسک به صورت زیر است:

$$R(z, t) = 1 - ae^{bz}(1 - e^{ct})$$

که در آن:

R(z, t): احتمال بقا براساس ذخیره ریسک و زمان

z: ذخیره ریسک

t: زمان

a, b, c: ضرایب محاسباتی (اعداد ثابت مربوط به محاسبه

این ضرایب معمولاً از طرف سازمان‌ها اعلام می‌شود)

e: عدد نپر تقریباً معادل ۲/۷۱۸.

به عنوان مثال، در سال اول اگر ذخیره ریسک ۲ برابر شود، احتمال بقای سازمان معادل ۹۵/۷٪ است اما در سال دوم احتمال بقای سازمان معادل ۹۵/۴٪ است که کمی نسبت به سال قبل کاهش می‌یابد و ممکن است تهدیدی برای بانک تلقی شود.

همچنین مشاهده می‌شود که در یک زمان ثابت به عنوان مثال در سال اول وقتی ذخیره ریسک را یک واحد در نظر بگیریم احتمال بقای سازمان ۸۸٪ است اما اگر در همان سال ذخیره ریسک را دو برابر کنیم احتمال بقا به ۹۵/۷٪ رسیده و افزایش چشمگیری خواهد یافت. احتمال بقا در زمان‌های مختلف به‌ازای ذخیره ریسک داده شده در جدول زیر آمده است:

t	احتمال بقا با ذخیره ریسک معادل یک واحد	احتمال بقا با ذخیره ریسک معادل دو واحد
سال اول	۸۸٪	۹۵/۷٪
سال سوم	۸۷٪	۹۵/۴٪

کلید واژه‌ها

Bank	بانک
Risk	ریسک
Operational Risk	ریسک عملیاتی
Management	مدیریت
Equation	معادله
Calculation	محاسبه
Economic activity	فعالیت اقتصادی
Probability of Survival	احتمال بقا
Risk reserve	ذخیره ریسک
Occurrence	وقوع
Loss value	ارزش زیان
Distribution	توزیع
Amount	مبلغ
Capital	سرمایه
Asset	دارایی
Risk tolerance	ریسک‌پذیری
Ball contract	پیمان بال
Adequacy ration	نسبت کفایت

* پی‌نوشت‌ها

۱. احتمال بقا به زبان ساده یعنی با شرایط موجود یک بانک یا یک سازمان، احتمال عدم ورشکستگی یا احتمال ادا فعالیت یک سازمان چقدر است. احتمال بقا در مقابل احتمال ورشکستگی قرار دارد.

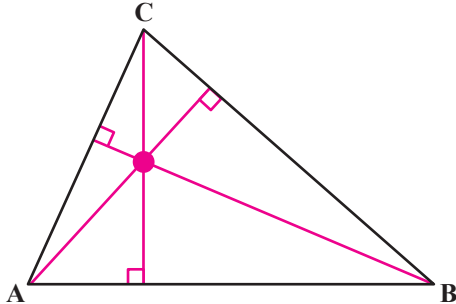
منابع

۱. سایت بانک مرکزی <http://www.cbi.ir>
۲. حل معادله انتگرال - دیفرانسیل مربوط به مدل ریسک عملیاتی، ششمین همایش ریاضیات و علوم انسانی - دانشگاه علامه طباطبائی، مهر ۱۳۹۸، فریبرز، دمرچلی، رسولی.
۳. حامد فلامرزی، ملیحه مجیدی، و حسین هوشیارزاده، «حسابرسی فناوری و ریسک عملیاتی»، کنفرانس بین‌المللی پژوهش‌های نوین در مدیریت، اقتصاد و حسابداری.
۴. داوری، مجیدرضا، و پهلوانی قمی، معصومه، (۱۳۸۸). مدیریت ریسک عملیاتی در بانک‌های تجاری. پژوهشنامه اقتصادی، ۶ (ویژه‌نامه بانک).
۵. سمانه محمدی‌فر، و بهرام محسنی ملکی، «بررسی ارتباط بین ریسک عملیاتی و محافظه کاری حسابداری»، کنفرانس بین‌المللی اقتصاد، مدیریت و فرهنگ ایرانی اسلامی.

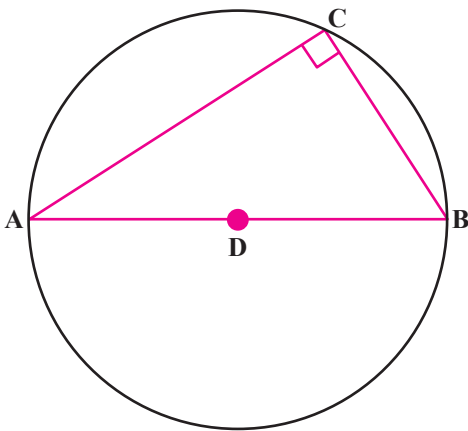
آموزشی

♦ جلال سرحدی (دبیر ریاضی عباس آباد مازندران)
♦ ملیحه علوی زاده (دبیر ریاضی قائن خراسان جنوبی)
♦ حسین کریمی

۱ در هر مثلث، سه ارتفاع در یک نقطه هم‌رسند.

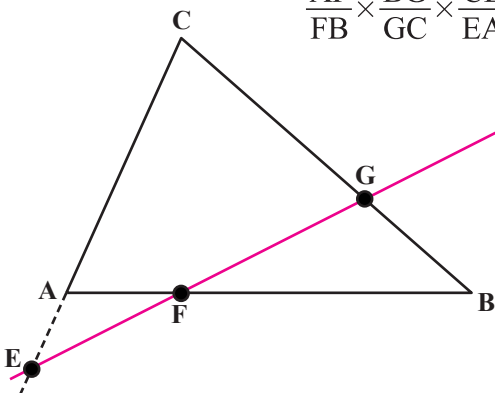


۲ در هر دایره زاویه محاطی رو به قطر، قائمه است.



۳ قضیه منلائوس: اگر خطی مثلث ABC یا امتداد اضلاع آن را قطع کند رابطه زیر برای آن صادق است.

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BG}{GC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$



۴ با فرض آن که I نقطه هم‌رسی سه ارتفاع AP و BQ و CH در مثلث ABC باشد داریم: $\angle HAI = \angle HQI$



مقدمه: در کتاب‌های هندسه دبیرستانی با رسم خطوط خاص و شکل‌های خاص به کمک ابزار اقلیدسی (خط کش غیرمدرج و پرگار) آشنا شدیم (ابزارهایی مانند گونی یا نقاله جزو ابزار اقلیدسی نیستند) و نمونه‌های متعددی دیدیم از جمله:

۱. رسم خط گذرا از یک نقطه معین و عمود بر خط مفروض.

۲. رسم خط گذرا از یک نقطه معین و موازی با خط مفروض.

۳. رسم عمود منصف یک پاره خط.

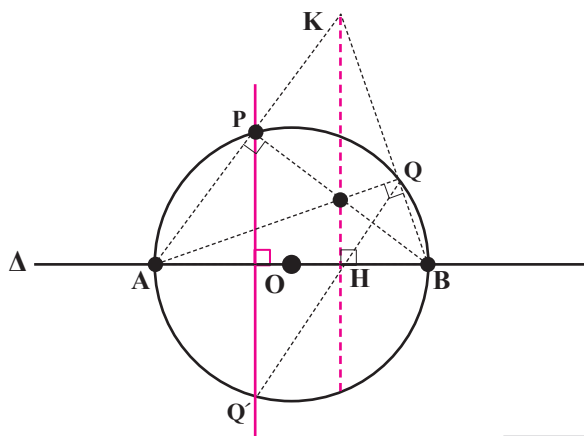
۴. رسم نیم‌ساز یک زاویه. و ...

که در هر یک از موارد فوق، چندین بار از پرگار استفاده کردیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که اگر پرگارمان، یک بار مصرف باشد و در هر رسم فقط بتوانیم یک دایره رسم کنیم و نه بیشتر، آیا ترسیم‌هایی به مانند موارد فوق را می‌توانیم انجام دهیم؟

قبل از عنوان کردن مثال‌ها و ارائه روش رسم، به چند نکته اشاره می‌کنیم.

تذکره ۱: اگر P در شکل (۱) خارج دایره واقع باشد، کافی است در شکل (۲) جای K و P را عوض کنیم.

تذکره ۲: اگر P در شکل (۱) روی دایره واقع باشد از شکل (۳) استفاده می‌کنیم.

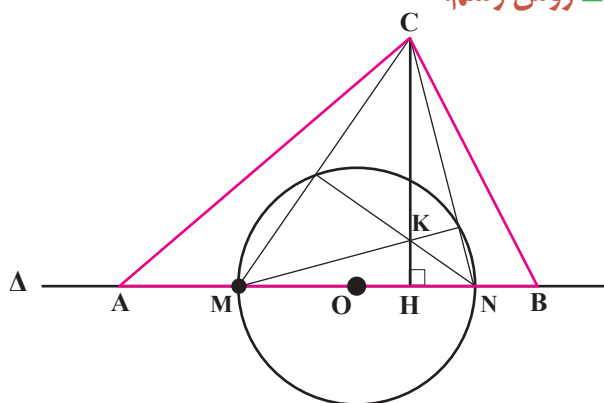


شکل ۳

مثال ۲

روش رسم ارتفاع CH در مثلث ABC را بنویسید. (استفاده از پرگار بیش از یک بار مجاز نیست)

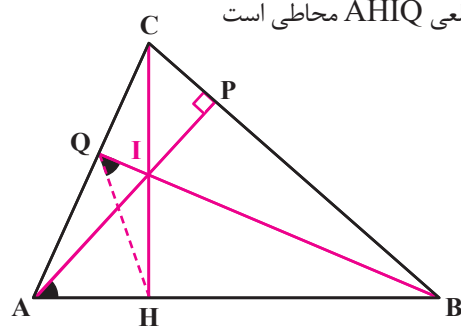
روش رسم:



شکل ۴

امتداد خط AB را Δ می‌نامیم. نقطه دلخواه O را روی AB انتخاب کرده و دایره‌ای به مرکز O به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم. به مانند مثال ۱ عمل کرده و CK را امتداد می‌دهیم، ارتفاع CH رسم می‌شود.

زیرا چهارضلعی $AHIQ$ محاطی است



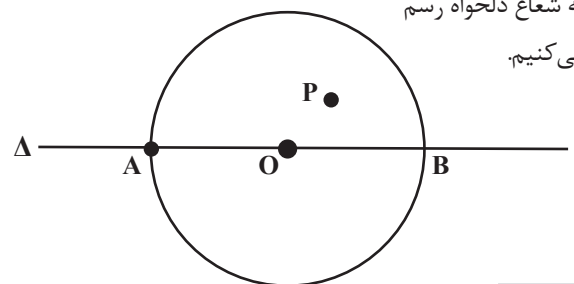
مثال ۱

روش رسم خط گذرا از نقطه P و عمود بر خط Δ را بنویسید. (استفاده از پرگار بیش از یک بار مجاز نیست)

روش رسم:

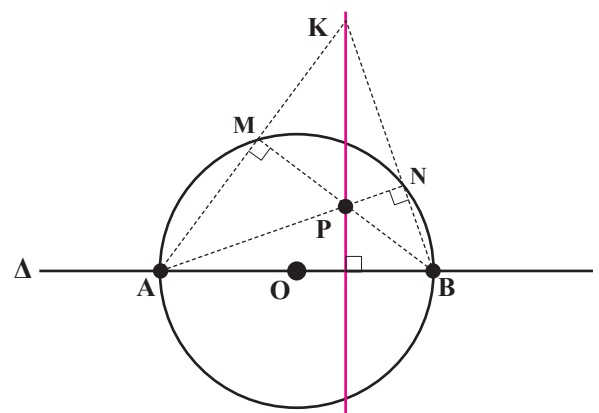
گام اول: نقطه دلخواه O را روی Δ در نظر می‌گیریم و دایره‌ای

به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم.



شکل ۱

گام دوم: امتداد AP و BP به ترتیب دایره را در M و N قطع می‌کند و نقطه تلاقی امتداد AM و BN را K می‌نامیم.



شکل ۲

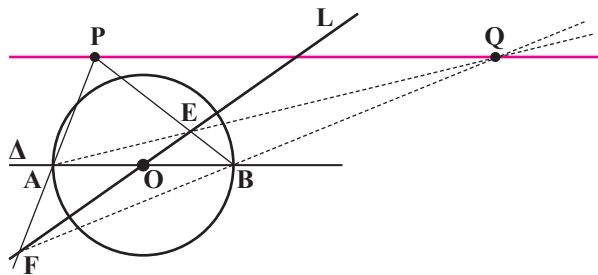
امتداد KP همان عمود رسم شده از P بر خط Δ است.

مثال ۳

روش رسم خط گذرا از نقطه P و موازی با خط Δ را بنویسید.
(استفاده از پرگار بیش از یک بار مجاز نیست)

روش رسم I:

نقطه دلخواه O را روی Δ اختیار کرده و دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم.



شکل ۵

خط دلخواه L قاطع با مثلث ABP و گذرا از O را رسم می‌کنیم و طبق قضیه منلائوس داریم:

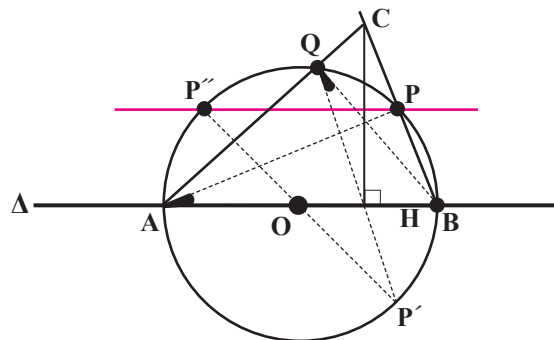
$$\triangle APB \xrightarrow{\text{قاطع } L} \frac{AO}{OB} = R \times \frac{BE}{EP} \times \frac{PF}{FA} = 1$$

$$\triangle FPB \xrightarrow{\text{قاطع } AE} \frac{EB}{EP} \times \frac{PA}{AF} \times \frac{FQ}{QB} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{PF}{AP} = \frac{FQ}{QB} \Rightarrow PQ \parallel \Delta$$

روش رسم II:

به مرکز نقطه دلخواهی از Δ (O) و به شعاع OP دایره‌ای رسم می‌کنیم.



شکل ۶

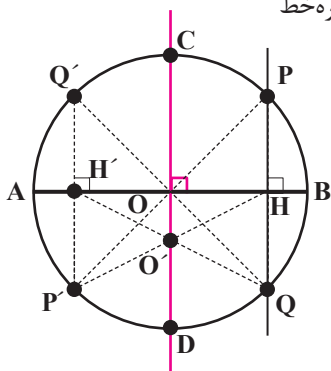
نقطه اختیاری Q را در نظر گرفته و به مانند مثال ۲ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. امتداد QH دایره را در P' قطع می‌کند.
امتداد P'O دایره را در P'' قطع می‌کند. که با توجه به $P''P \parallel \Delta$ داریم: $P'B = \widehat{PB}$

مثال ۴

پاره خط AB (که نقطه میانی آن یعنی O را داریم) مفروض است. روش رسم عمود منصف AB را بنویسید. (استفاده از پرگار بیش از یک بار مجاز نیست)

روش رسم:

با توجه به مثال ۱ امتداد PHQ، عمود بر AB را رسم می‌کنیم. قرینه P و Q را نسبت به O به ترتیب P' و Q' می‌نامیم و Q'P' در نقطه H' عمود بر AB خواهد بود. در مستطیل HQP'H' دو قطر P'H و Q'H یکدیگر را در O قطع می‌کنند. امتداد OO' همان عمود منصف پاره خط AB است.



شکل ۷

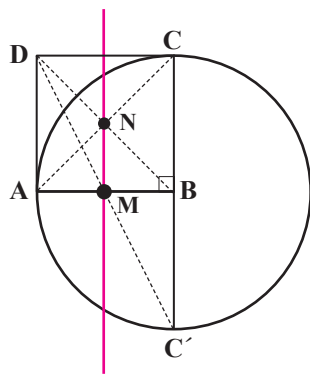
یادآوری

با توجه به مثال‌های ۳ و ۴، می‌توان با در دست داشتن دایره به مرکز O و قطر AB و رسم CC' به عنوان عمود منصف آن، مماس‌هایی بر دایره رسم نمود که به موازات AB و به موازات CC' باشند.

شکل ۸

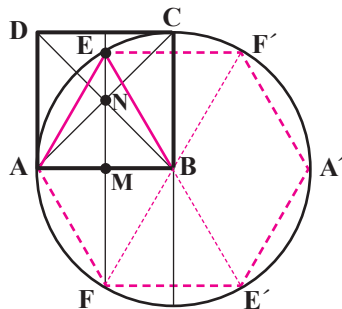


گام چهارم: از C' به D وصل می‌کنیم تا AB را در M نصف کند، محل تلاقی دو قطر مربع $ABCD$ را N می‌نامیم، MN را امتداد می‌دهیم، عمود منصف AB حاصل می‌شود.



شکل ۱۲

تذکره: دو شکل (۱۲ و ۱۳) تکمیل شده شکل (۱۱) هستند. با توجه به شکل (۱۲ و ۱۳) و با فرض $|AB| = a$ می‌توان هر یک از شکل‌های زیر را که برای رسم آن‌ها به استفاده از پرگار بیش از یک بار مجاز نباشیم، اقدام کرد.



شکل ۱۳

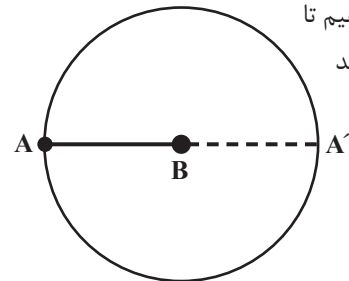
مثال ۵

پاره خط AB (که نقطه میانی آن را نداریم) مفروض است. روش رسم عمود منصف AB را بنویسید. (استفاده از پرگار بیش از یک بار مجاز نیست)

روش رسم:

گام اول: دایره به مرکز B و به شعاع BA رسم می‌کنیم و AB

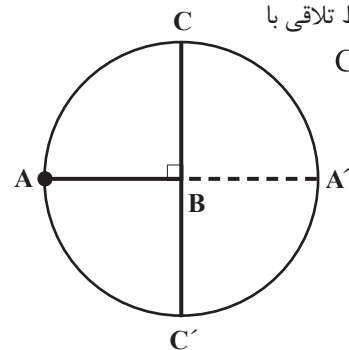
را امتداد می‌دهیم تا قطر AA' پدید آید.



شکل ۹

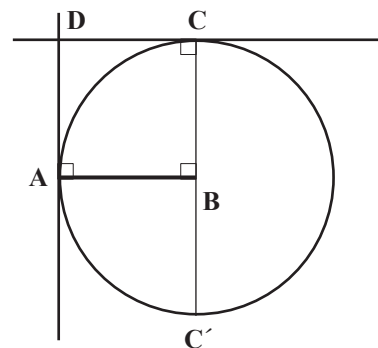
گام دوم: با توجه به مثال ۴، عمود منصف قطر AA' را رسم

می‌کنیم و نقاط تلاقی با دایره را C و C' می‌نامیم.



شکل ۱۰

گام سوم: با توجه به مثال ۳، از نقاط A و C مماس‌هایی بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند.

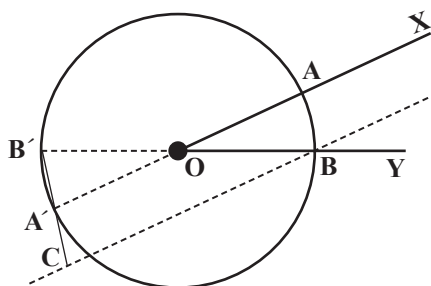


شکل ۱۱

اضلاع یک در میان با هم برابرند.
 امتداد CB و $D'A$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند.
 (در چهارضلعی $OAPB$ داریم: $OA=OB$ و $AP=BP$)، پس
 OP نیمساز زاویه XOY است.

■ روش رسم II :

گام اول: دایره‌ای به مرکز O و به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم
 تا OX را در A و OY را در B قطع کند. دو قطر AA' و BB'
 را رسم می‌کنیم.

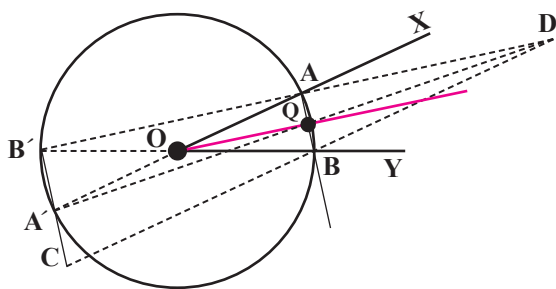


شکل ۱۶

از B به موازات قطر AA' رسم می‌کنیم (مثال ۳) تا امتداد
 $B'A'$ را در C قطع کند.

$$\triangle BB'C : BC \parallel OA', OB = OB' \Rightarrow B'A' = A'C$$

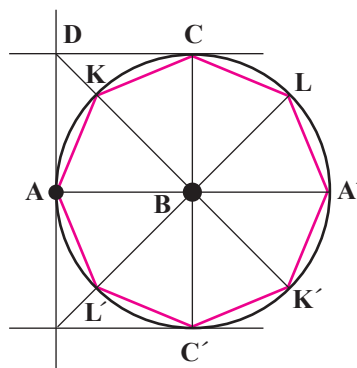
گام دوم: امتداد CB و $B'A$ یکدیگر را در D قطع می‌کنند:
 $\triangle B'CD : AB \parallel B'C, B'A' = A'C$



شکل ۱۷

پس DA' میانه مثلث $B'CD$ است و AB را در Q نصف
 می‌کنند. پس OQ نیمساز XOY است.

۱. رسم مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a . (ABE)
۲. رسم مربع به ضلع a . $(ABCD)$
۳. رسم شش ضلعی منتظم به ضلع a . $(AEF'A'E'F')$
۴. رسم هشت ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع
 a . $(AKCLA'K'C'L')$



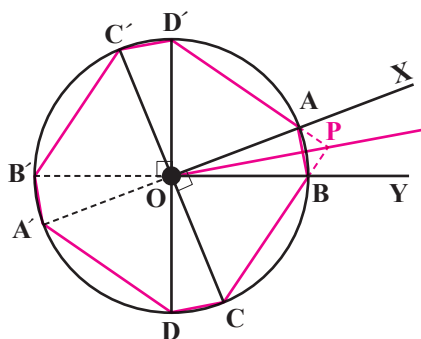
شکل ۱۴

◀ مثال ۶ ▶

زاویه XOY مفروض است، روش رسم نیمسازهای زاویه را
 بنویسید. (استفاده از پرگار بیش از یکبار مجاز نیست)

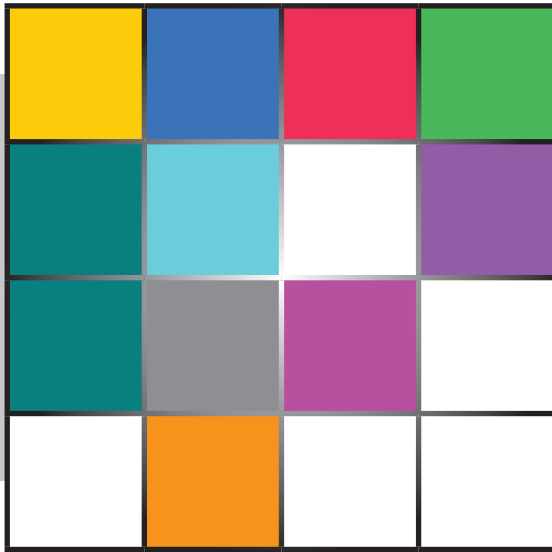
■ روش رسم I :

دایره‌ای به مرکز O و به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم تا OX
 را در A و OY را در B قطع کند. دو قطر AA' و BB' را رسم
 می‌کنیم.



شکل ۱۵

به مانند مثال ۴، CC' را عمود بر قطر AA' و نیز DD' را عمود بر
 قطر BB' رسم می‌کنیم. در هشت ضلعی $ABCD A'B'C'D'$ ،



مربع های جادویی مرلین

اشاره

مربع های جادویی مرلین^۱ یک بازی دستی الکترونیکی است که توسط برادران پارسا ساخته شد. این بازی شامل یک مربع 3×3 با ۹ خانه (یا کلید) که مقادیری صفر و یک می گیرند. با فشردن هر کلید، تعدادی از خانه های جدول از صفر به یک یا برعکس تغییر می کنند. در شروع بازی، یک جدول ابتدایی و یک جدول نهایی داده می شود که بازیکن با فشردن کلیدها، جدول ابتدایی را به جدول پایانی برسانند و برنده شود. در ادامه نشان می دهیم که این بازی را می توان با یک دستگاه معادلات خطی مدل سازی کرد به طوری که جواب دستگاه کلیدهای مناسب را نشان می دهد.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات خطی، مربع جادویی مرلین، میدان دودویی، وارون ماتریس

مقدمه

(۱)

نه کلید در مربع جادوی مرلین وجود دارد که آن ها به صورت زیر نام گذاری می کنیم:

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

شکل ۱: صفحه بازی

۳، ۷ و ۹، کلیدهای لبه شامل ۲، ۴، ۶ و ۸ می باشند و ۵ کلید میانی است. با فشردن هر کلید، محتوی کلید و برخی کلیدهای اطراف آن طبق قاعده خاصی تغییر می کنند، یعنی از صفر به یک یا برعکس تبدیل می شوند. با فشردن کلیدهای گوشه ای، چهار کلید شامل سه کلید اطراف و خود کلید تغییر می کند، به عنوان مثال اگر بازیکن کلید ۱ را فشار دهد خانه های ۵، ۴، ۲، ۱ تغییر می کنند. تغییرات کلیدهای گوشه ای به صورت:

۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳
۴	۵	۶	۴	۵	۶	۴	۵	۶	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۷	۸	۹	۷	۸	۹	۷	۸	۹

قانون کلیدهای گوشه ای

شکل ۲: کلیدهای گوشه ای

کلیدها را به سه دسته کلیدهای گوشه ای، کلیدهای لبه و کلید میانی تقسیم می کنیم. کلیدهای گوشه ای شامل کلیدهای شماره ۱،

۲ کاربرد جبر خطی

در این بخش، مدل ریاضی این بازی را به کمک جبر خطی بیان می‌کنیم. از آنجا که اعداد این بازی فقط ۰ و ۱ هستند، بنابراین در میدان اعداد دودویی با دو عمل جمع و ضرب به پیمانه ۲ به صورت زیر کار می‌کنیم:

جمع دودویی			ضرب دودویی		
+	۰	۱	×	۰	۱
۰	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۰	۱

جمع هر عدد در حساب دویی با عدد ۱ باعث می‌شود که عدد از ۰ به ۱ یا از ۱ به ۰ تغییر کند. بنابراین، فشردن هر کلید به این معناست که مقادیر برخی خانه‌ها طبق شکل ۵ با عدد یک جمع شوند. هر ماتریس را می‌توان با زیر هم چیدن سطرهای آن به صورت زیر برداری کرد:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

بردار نظیر شکل ابتدایی را با V_p و بردار نظیر شکل نهایی یا برنده را با V_w نشان می‌دهیم. فرض کنید وضعیت اولیه و برنده به صورت زیر است:

وضعیت اولیه			برنده		
۱	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱

فشردن کلید لبه، کلیدی که در آن لبه یا ضلع قرار دارد را تغییر می‌دهد:

کلیدهای لبه		
۱ ۲ ۳	۱ ۲ ۳	۱ ۲ ۳
۴ ۵ ۶	۴ ۵ ۶	۴ ۵ ۶
۷ ۸ ۹	۷ ۸ ۹	۷ ۸ ۹

شکل ۳: کلیدهای لبه

و فشردن کلید میانی ۵ کلید شامل چهار کلید مجاور و کلید شماره ۵ را تغییر می‌دهد:

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

کلید میانی

شکل ۴: کلیدهای میانی

جدول زیر قاعده بازی را بیان می‌کند و نشان می‌دهد فشردن هر کلید چگونه روی خانه‌های اطراف تأثیر می‌گذارد:

Pressing button	alters the state of buttons
۱	۱، ۲، ۴ و ۵
۲	۱، ۲ و ۳
۳	۲، ۳، ۵ و ۶
۴	۱، ۴ و ۷
۵	۲، ۴، ۵، ۶ و ۸
۶	۳، ۶ و ۹
۷	۴، ۵، ۷ و ۸
۸	۷، ۸ و ۹
۹	۵، ۶، ۸ و ۹

شکل ۵: قواعد بازی

سؤال: چه کلیدهایی باید فشرده شود تا برنده شویم؟
پاسخ این پرسش را به کمک جبر خطی در بخش بعد بیان می‌کنیم.

نمایش برداری آن‌ها عبارتند از:

$$V_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad V_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فشردن هر کلید تعدادی از خانه‌های اطراف آن را تغییر می‌دهد یعنی مقدار آن‌ها را از صفر به یک یا برعکس تغییر می‌دهد. طبق حساب دودویی، خانه‌هایی که تغییر می‌کنند در حقیقت با عدد ۱ جمع می‌شوند. بنابراین، فشردن کلید i معادل با جمع با بردار u_i تایی شامل صفر و یک است، به طوری که درایه j بردار u_i برابر ۱ است اگر کلید i محتوی خانه j را تغییر دهد. اگر V_p وضعیت موجود و بردار u_i نظیر کلید i ام باشد، وضعیت فعلی V_p' پس از فشردن کلید i ام عبارتست از:

$$V_p' = u_i + V_p$$

مثال ۱

فشردن کلید ۱ باعث تغییر در خانه‌های ۱، ۲، ۴ و ۵ می‌شود، پس درایه‌های ۱، ۲، ۴ و ۵ بردار u_1 برابر ۱ و بقیه برابر صفر می‌باشند:

$$u_1 = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

فشردن کلید ۱ وضعیت اولیه V_p را به صورت زیر تغییر می‌دهد:

$$V_p + u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = V_p^t$$

۹ کلید بازی را می‌توان به وسیله ۹ بردار $u_1, \dots, u_9$ به صورت زیر

بیان کرد:

$u_1 =$	(1 1 0 1 1 0 0 0 0) ^T
$u_2 =$	(1 1 1 0 0 0 0 0 0) ^T
$u_3 =$	(0 1 1 0 1 1 0 0 0) ^T
$u_4 =$	(1 0 0 1 0 0 1 0 0) ^T
$u_5 =$	(0 1 0 1 1 1 0 1 0) ^T
$u_6 =$	(0 0 1 0 0 1 0 0 0) ^T
$u_7 =$	(0 0 0 1 1 0 1 1 0) ^T
$u_8 =$	(0 0 0 0 0 0 1 1 1) ^T
$u_9 =$	(0 0 0 0 1 1 0 1 1) ^T

برنده V_w با فشردن تعدادی از کلیدها از حالت اولیه (شروع) V_p حاصل می‌شود. از آنجا که هر کلید نظیر یک بردار u_i است بنابراین فشردن یک دنباله از کلیدها برای رسیدن از ترکیب اولیه به حالت نهایی با یک ترکیب خطی به صورت زیر قابل بیان است:

$$V_w = V_p + s_1 u_1 + s_2 u_2 + \dots + s_9 u_9 \quad \text{رابطه (۱):}$$

بدین ترتیب، حرکات بازیکن در مربع مرلین با ترکیب خطی از بردارهای $u_1, \dots, u_9$ در حساب دودویی تفسیر می‌شود. فشردن تعداد فرد از یک کلید معادل یک‌بار و تعداد زوج معادل استفاده نکردن از آن است، بنابراین اسکالرهایی s_i مقادیر ۰ یا ۱ را می‌گیرند به طوری که:

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر دکمه } i \text{ را فشار دهیم} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همچنین، در حساب دودویی:

$$V_w - V_p = V_w + V_p$$

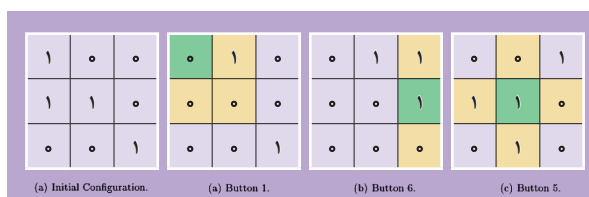
بنابراین:

$$V_w + V_p = s_1 u_1 + \dots + s_9 u_9$$

حرکات بازیکن طبق رابطه (۱) فرمول‌بندی می‌شود. از آنجا که جمع خاصیت جابه‌جایی دارد بنابراین ترتیب فشردن کلیدها تأثیری در نتیجه نهایی ندارد.

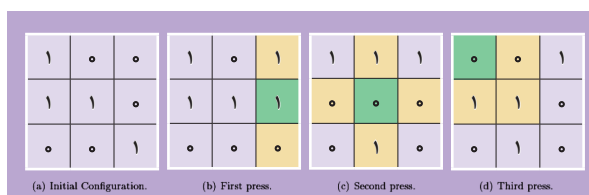
مثال ۲

شکل زیر مربع اولیه تأثیر فشردن کلیدهای ۱، ۶ و ۵ را نشان می‌دهد:



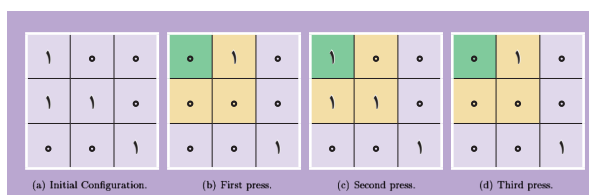
شکل ۶: تأثیر فشردن کلیدهای ۱، ۵ و ۶

اگر کلیدهای ۱، ۵ و ۶ به ترتیب فشرده شوند، نتیجه نهایی تغییر نمی‌کند:



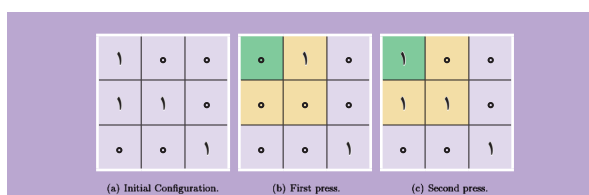
شکل ۷: تأثیر فشردن کلیدهای ۱، ۵ و ۶

اگر بازیکن یک دکمه را به تعداد فرد فشار دهد، نتیجه آن مشابه زمانی است که همان دکمه را یکبار فشار داده باشد:



شکل ۸

دکمه بالا سمت چپ برای اولین، دومین و سومین بار فشار داده می‌شود و اگر دکمه‌ای را به تعداد زوج فشار دهد تغییری حاصل نمی‌شود:



شکل ۹

دکمه بالا سمت چپ (شکل ۹) برای اولین، دومین بار فشار داده می‌شود. اکنون فرم ماتریسی رابطه (۱) را بیان می‌کنیم. ماتریس $A_{9 \times 9}$ ستون‌های آن u_i هستند را در نظر می‌گیریم:

$$A = (U_1, \dots, U_9) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اسکالره‌های s_i جواب دستگاه: $As = v_w + v_p$ ماتریس A وارون‌پذیر است و

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $s = A^{-1}(v_w + v_p)$ درایه‌های s بیان می‌کنند که با فشردن کدام کلیدها به شکل نهایی یا برنده می‌رسیم.

$$A^{-1}(V_w + V_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = S.$$

درایه‌های ۱ بردار S در مکان‌های ۵، ۶، ۷ و ۹ قرار دارند. پس فشردن این چهار کلید از وضعیت اولیه به برنده خواهیم رسید.

تفریح اندیشه

ترجمه: غلامرضا یاسی پور

..... معمای برج آب

مسئله زیر مسئله‌ای حسابی است که بسیاری از خوانندگان را گیج می‌کند. اما در صورتی که باشکيبایی توضیح داده شود کودکی نیز آن را درک می‌کند.

از مخزن آبی، آب به‌طور دائم، با نرخ ثابت ۱۰۰۰ گالن در ساعت، به شهری وارد می‌شود. از آنجا که مصرف آب در شبانه‌روز تغییر می‌کند. اضافه آن، هنگامی که ورود آب از مصرف آن، افزون می‌شود، در برجی، برای زمانی که مصرف آن از ورود آن فزونی می‌گیرد، ذخیره می‌شود. تعداد گالن‌های مصرف شده طی هشت دوره سه ساعته متوالی به این طریق است: ۲۰۰۰، ۵۰۰۰، ۴۵۰۰، ۲۵۰۰، ۴۰۰۰، ۵۰۰ و ۱۵۰۰ گالن. با این فرض که آب در هر دوره سه ساعته با نرخ ثابتی مصرف می‌شود، ظرفیت برج چقدر باشد تا همواره جوابگوی وضعیت حاصل باشد؟

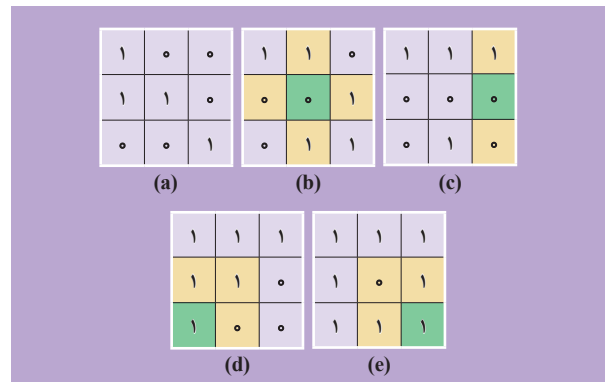
$$0001 = 0001 + 0001$$

در هر دوره سه ساعته، مصرف آب در هر دوره سه ساعته، با نرخ ثابتی مصرف می‌شود. ظرفیت برج چقدر باشد تا همواره جوابگوی وضعیت حاصل باشد؟

در هر دوره سه ساعته، مصرف آب در هر دوره سه ساعته، با نرخ ثابتی مصرف می‌شود. ظرفیت برج چقدر باشد تا همواره جوابگوی وضعیت حاصل باشد؟

در هر دوره سه ساعته، مصرف آب در هر دوره سه ساعته، با نرخ ثابتی مصرف می‌شود. ظرفیت برج چقدر باشد تا همواره جوابگوی وضعیت حاصل باشد؟

بشماره



بدین ترتیب بازی مرلین با یک دستگاه معادلات خطی در میدان دودویی مدل‌سازی می‌شود و جواب این دستگاه کلیده‌های مناسب برای رسیدن به جواب برنده را محاسبه می‌کند.

```
clc
clearall
k = 1;
for i = 1:3
    for j = 1:3
        str = sprintf('Enter vp(%d,%d):', i, j);
        vp(k) = input(str);
        k = k + 1;
    end
end
k = 1;
for i = 1:3
    str = sprintf('Enter vw(%d,%d):', i, j);
    vw(k) = input(str);
    k = k + 1;
end
end
```

```
iA = [1 0 1 0 0 1 1 1 0
      1 1 1 1 1 1 0 0 0
      1 0 1 1 0 0 0 1 1
      1 1 0 1 1 0 1 1 0
      1 0 1 0 1 0 1 0 1
      0 1 1 0 1 1 0 1 1
      1 1 0 0 0 1 1 0 1
      0 0 0 1 1 1 1 1 1
      0 1 1 1 0 0 1 1 0];
```

```
x = iA * (vp + vw)';
disp(mod(x, 2))
```

* پی‌نوشت

1. Merlin's MagicSquares

آشتی با هندسه

مقدمه: سلام ... امیدوارم حالتون خوب باشد و سالم و سلامت باشید، بی مقدمه برویم سر قولی که دادیم اثبات چند قضیه مهم و کاربردی که با آنها بتوان مسئله‌های مهمی را اثبات و حل کرد.

و به کمک متشابه مثلث‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{CN}{AN} \quad \text{و} \quad \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AP}{BP}$$

پس:

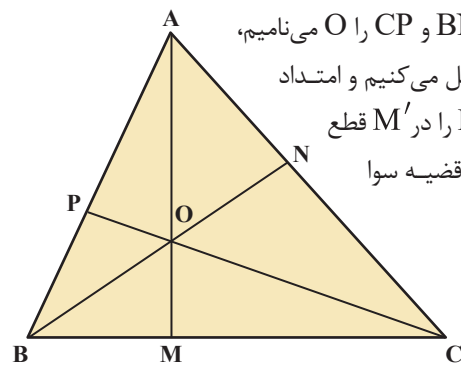
$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}} \cdot \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}} \cdot \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}} = 1$$

(عکس قضیه سوا):

(۲)

نقاط M و N و P به ترتیب بر اضلاع (و یا امتداد اضلاع) BC ، AC و AB از مثلث ABC قرار دارند. اگر داشته باشیم $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$ آنگاه سه پاره خط AM و BN و CP هم‌مرسند.

فرض می‌کنیم سه پاره خط AM و BN و CP هم‌مرس نباشند محل برخورد BN و CP را O می‌نامیم، از A به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا M' در BC را قطع کند. با توجه به قضیه سوا می‌توان نوشت:



$$\frac{BM'}{CM'} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} = 1$$

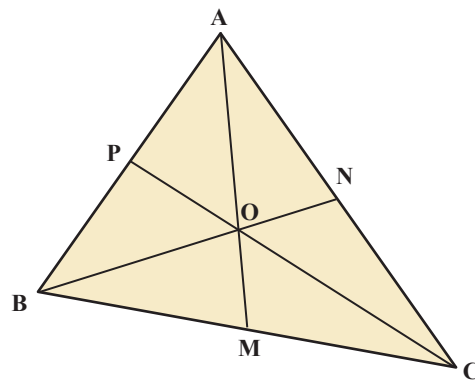
قضیه سوا:

(۱)

نقاط M و N و P به ترتیب بر اضلاع (و یا امتداد اضلاع) BC ، AC و AB از مثلث ABC قرار دارند اگر سه پاره خط AM ، BN و CP هم‌مرس باشند، آنگاه:

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$$

برهان: فرض کنیم سه پاره خط AM و BN و CP در O هم‌مرس باشند.



$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}} = \frac{BM}{CM} \quad \xrightarrow{?} \quad \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{BM}{CM}$$

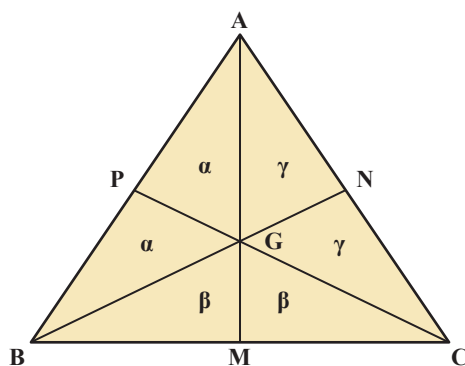
$$\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle COM}} = \frac{BM}{CM}$$

نکته: محل برخورد میانه‌ها را «مرکز ثقل» مثلث گویند و با حرف «G» نشان می‌دهیم.

مثال ۲

میانه‌های مثلث، مثلث را به شش مثلث کوچک هم مساحت تقسیم می‌کنند.

برهان: محل برخورد میانه‌های AM، CP و BN از مثلث ABC را G می‌نامیم.



GP میانه مثلث ABG است پس:

$$S_{\triangle APG} = S_{\triangle BPG} = \alpha \quad (I)$$

GM میانه مثلث BGC است پس:

$$S_{\triangle BGM} = S_{\triangle CGM} = \beta \quad (II)$$

و GN میانه مثلث AGC است پس:

$$S_{\triangle CGN} = S_{\triangle AGN} = \gamma \quad (III)$$

از طرفی چون AM میانه مثلث ABC است.

پس:

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM} \xrightarrow{I, II, III} 2\alpha + \beta = 2\gamma + \beta$$

$$\Rightarrow \alpha = \gamma$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

از برابری تناسب به دست آمده و فرض مسئله داریم:

$$\frac{CM'}{BM'} = \frac{CM}{BM} \Rightarrow \frac{CM' + BM'}{BM'} = \frac{CM + BM}{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BM'} = \frac{BC}{BM} \Rightarrow BM' = BM$$

یعنی M و M' منطبق می‌شود و قضیه اثبات می‌گردد.

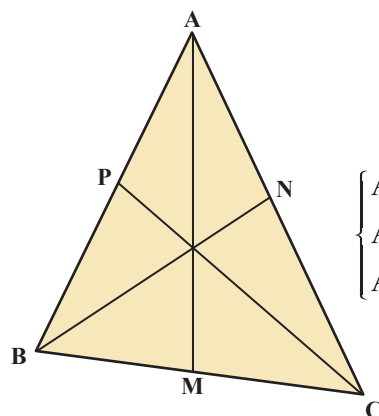
تذکر: اگر M بر امتداد ضلع BC قرار داشته باشد از تفاضل صورت و مخرج استفاده کنید.

نکته: این امکان وجود دارد که با فرض مسئله سه نقطه M، N و P بر یک امتداد قرار گیرند. اکنون می‌خواهیم کاربرد این قضیه مهم و عکس آن را در حل مسئله‌های کتاب‌های درسی هم مشاهده کنیم.

مثال ۱

نشان دهید سه میانه مثلث هم‌رس‌اند.

برهان: فرض کنیم میانه‌های AM، BN و CP اضلاع BC، AC و AB را در M و N و P قطع کرده باشند می‌دانیم:



$$\begin{cases} AP = BP \\ AN = NC \\ AM = MC \end{cases} \quad (I)$$

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \xrightarrow{(I)} 1$$

پس:

پس بنابر عکس سوا، AM و BN و CP هم‌رسند.

تمرین ۱

ثابت کنید، اگر G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1} \quad \text{یا به عبارتی } AG = 2GM.$$

تمرین ۲

نشان دهید سه ارتفاع هم‌رسانند.

نکته: نقطه هم‌رسانی ارتفاع‌ها را «مرکز ارتفاعی» گویند.

قضیه سوا سینوسی:

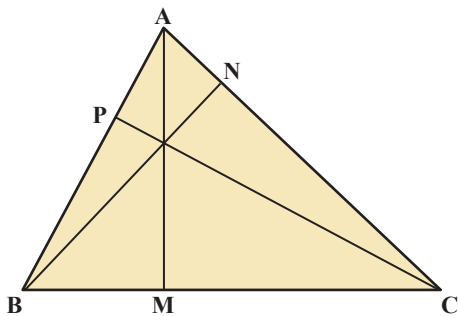
(۳)

فرض کنید M, N, P به ترتیب بر اضلاع BC, AC, AB از مثلث ABC قرار دارند اگر سه پاره‌خط AM, BN, CP هم‌رأس باشند داریم:

$$\frac{\sin \hat{B} \hat{A} M}{\sin \hat{C} \hat{A} M} \cdot \frac{\sin \hat{C} \hat{B} N}{\sin \hat{A} \hat{B} N} \cdot \frac{\sin \hat{A} \hat{C} P}{\sin \hat{B} \hat{C} P} = 1$$

برهان: در اثبات این قضیه سینوس‌ها که در هندسه ۲ با آن آشنا هستید کمک می‌گیریم.

فرض کنید M و N و P بر اضلاع BC, AC, AB باشند با توجه به قضیه سینوس‌ها در دو مثلث ABM و ACM



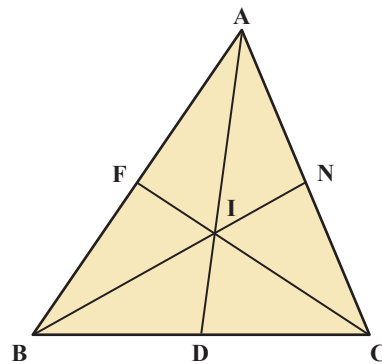
$$\frac{BM}{\sin \hat{B} \hat{A} M} = \frac{AM}{\sin \hat{B}} \Rightarrow BM = \frac{AM \cdot \sin \hat{B} \hat{A} M}{\sin \hat{B}}$$

$$\frac{CM}{\sin \hat{C} \hat{A} M} = \frac{AM}{\sin \hat{C}} \Rightarrow CM = \frac{AM \cdot \sin \hat{C} \hat{A} M}{\sin \hat{C}}$$

مثال ۳

نشان دهید نیمسازهای داخلی هر مثلث هم‌رأس‌اند.

برهان: فرض کنیم AD, BE, CF نیمسازهای داخلی نظیر زاویه‌های A, B و C از مثلث ABC باشند.



اگر $AB = c, AC = b$ و $BC = a$ اضلاع مثلث ABC باشند چون می‌دانیم نیمساز ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می‌کند پس:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{b}{a}, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{c}{a}, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

و بنابر عکس قضیه سوا، AD, BE, CF هم‌رأس‌اند.

عکس قضیه سوا سینوسی:

(۴)

نقطه‌های M و N و P به ترتیب بر اضلاع AC, BC, AB از مثلث

$$\frac{\sin \hat{B}AM}{\sin \hat{C}AM} \cdot \frac{\sin \hat{C}BN}{\sin \hat{A}BN} \cdot \frac{\sin \hat{A}CP}{\sin \hat{B}CP} = 1$$

قرار دارند و ۱ برقرار باشد سه پاره خط AM, BN و CP هم‌رأس‌اند.

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{\sin \hat{B}AM \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{C}AM \cdot \sin \hat{B}} \quad (I)$$

و به همین ترتیب داریم:

$$\frac{CN}{AN} = \frac{\sin \hat{C}BN \cdot \sin \hat{A}}{\sin \hat{A}BN \cdot \sin \hat{C}} \quad (II)$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin \hat{A}CP \cdot \sin \hat{B}}{\sin \hat{B}CP \cdot \sin \hat{A}} \quad (III)$$

با توجه به رابطه‌های I و II و III داریم:

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} = \frac{\sin \hat{B}AM}{\sin \hat{A}BN} \cdot \frac{\sin \hat{C}BN}{\sin \hat{A}BN} \cdot \frac{\sin \hat{A}CP}{\sin \hat{B}CP}$$

که چون بنا بر قضیه سوا

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} = 1$$

پس حکم قضیه برقرار است.

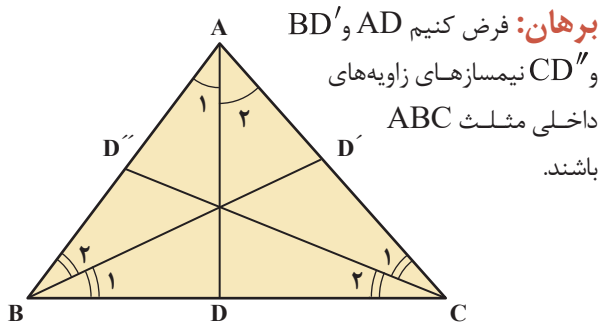
عکس این قضیه هم برقرار است که آن را بیان می‌کنیم و اثبات

آن را به عهده شما خواننده گرامی می‌گذاریم.

مثال ۴

به کمک قضیه سوا سینوسی نشان دهید نیمسازهای داخلی

هر مثلث هم‌رأس‌اند.



برهان: فرض کنیم AD و BD' و

و CD'' نیمسازهای زاویه‌های

داخلی مثلث ABC

باشند.

با توجه به خاصیت نیمسازها $\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2$

$$\frac{\sin \hat{A}_1}{\sin \hat{A}_2} \cdot \frac{\sin \hat{B}_1}{\sin \hat{B}_2} \cdot \frac{\sin \hat{C}_1}{\sin \hat{C}_2} = 1 \quad \text{چون:}$$

بنابر عکس قضیه سینوسی وسط پاره خط‌های AD, BD' و

CD'' هم‌رأس‌اند.

در شماره بعدی می‌خواهیم قضیه پرکاربرد منلائوس را با هم

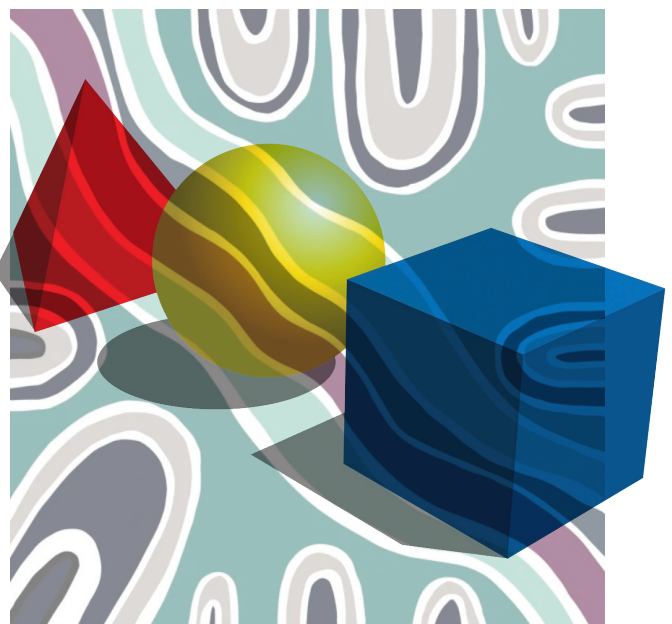
بررسی کنیم.

فعلاً خدا حافظی می‌کنم تا شماره بعد.

منابع

۱. جاوید دلیدشقی، مجموعه آمادگی برای المپیاد، فاطمی، چاپ چهارم ۱۳۹۶.
۲. ارشک حمیدی، هندسه از ابتدا تا ...، فاطمی چاپ سوم ۱۴۰۲.
۳. اصلاح‌پذیر بهمن، عالمگیر مرتضی، آشنایی با هندسه، فاطمی چاپ ششم ۱۳۹۹.
۴. خسروی امیر، محمد نصیری ابراهیم دارایی، هندسه ۲، وزارت آموزش و پرورش ۱۳۷۴.

5) DAVID HILBERT, PH.D The Foundations of Geometry 1950.



آموزش ترجمه متون ریاضی فارسی به انگلیسی (۵)



اثبات از طریق برهان خلف:

ما می‌خواهیم نشان بدهیم که p درست است. فرض می‌کنیم چنین نباشد و بنابراین $\sim p$ (نقیض p) درست است. سپس یک تناقض به دست می‌آوریم (نتیجه می‌گیریم) p باید درست باشد.

قضیه ۱۰.۱

اگر n^2 یک عدد صحیح و زوج باشد، در این صورت n نیز همین‌طور است (صحیح و زوج است).

اثبات:

خلاف این را فرض می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم n فرد باشد. بنابراین عددی صحیح مانند k وجود دارد به قسمی که: $n = 2k + 1$. در این حالت $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ عددی فرد است و این با فرض زوج بودن n^2 تناقض دارد. بنابراین n می‌باید زوج باشد.

قضیه ۱۰.۲

عدد $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات:

فرض کنیم چنین نباشد. یعنی فرض کنیم که $\sqrt{2}$ گویاست. بنابراین دو عدد صحیح m و n بدون هیچ مقسوم‌علیه مشترک وجود دارند به‌طوری‌که: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. با به توان ۲ رساندن دو طرف این تساوی خواهیم داشت: $2n^2 = m^2$. بنابراین m^2 زوج است. طبق قضیه ۱۰.۱، زوج است. یعنی، ۲ عدد m را می‌شمارد (m بر ۲ بخش پذیر است). به عبارت دیگر، برای بعضی اعداد صحیح مانند k داریم: $m = 2k$.

با به توان دو رساندن خواهیم داشت: $2n^2 = m^2 = 4k^2$ که نتیجه می‌گیریم: $n^2 = 2k^2$.

این تساوی نشان می‌دهد که n^2 زوج است و طبق قضیه ۱۰.۱، n زوج است.

ما نتیجه گرفتیم که ۲ هر دو عدد m و n را می‌شمارد (m و n هر دو بر عدد ۲ بخش پذیرند) و این با فرض ما که m و n هیچ مقسوم‌علیه (عامل) مشترکی ندارند، در تناقض است. بنابراین، $\sqrt{2}$ باید گنگ باشد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم			
1) Proof	اثبات، برهان	7) Contradict	تناقض
2) Contradiction	خلف	8) Assumption	فرض
3) Assume	فرض کردن	9) Irrational	گنگ، اصم، ناگویا
4) Even	زوج	10) Squaring	به توان ۲ رساندن
5) Integer	عدد صحیح	11) Common divisors	عامل‌های مشترک
6) Suppose	فرض کردن	12) Conclude	نتیجه‌گیری
		13) Odd	فرد

Proof by contradiction:

We want to show that p is true. We assume it is not and therefore $\sim p$ is true and then derive a contradiction. p must be true.

⇒ Theorem 10.1

If n^2 an even integer so is n .

Proof.

Suppose the contrary. That is suppose that n is odd. Then there is an integer k such that $n=2k+1$. In this case, $n^2=2(2k^2+2k)+1$ is odd and this contradicts the assumption that n^2 is even. Hence, n must be even.

⇒ Theorem 10.2

The number $\sqrt{2}$ is irrational.

Proof.

Suppose not. That is, suppose that $\sqrt{2}$ is rational. Then there exist two integers m and n with no common divisors such that $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Squaring both sides of this equality we find that $2n^2=m^2$. Thus, m^2 is even. By Theorem 10.1, m is even. That is, 2 divides m . But then $m=2k$ for some integer k . Taking the square we find that $2n^2=m^2=4k^2$, that is $n^2=2k^2$. This says that n^2 is even and by Theorem 10.1, n is even. We conclude that 2 divides both m and n and this contradicts our assumption that m and n have no common divisors. Hence, $\sqrt{2}$ must be irrational.

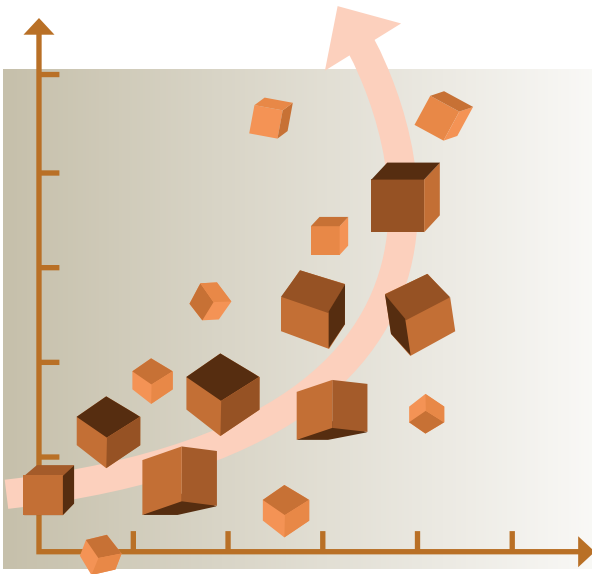
شما ترجمه کنید:

⇒ Theorem 10.3

The set of prime numbers is infinite.

Proof.

Suppose not. That is, suppose that the set of prime numbers is finite. Then these prime numbers can be listed, say, $p_1, p_2, \dots, p_n$. Now, Consider the integer $N=p_1 p_2 \dots p_n + 1$. By the Unique Factorization Theorem, (See Problem 12.5) N can be factored into primes. Thus, there is a prime number p , such that $p | N$. But since $p_i | p_1 p_2 \dots p_n$ we have $p_i | (N - p_1 p_2 \dots p_n) = 1$, a contradiction since $p_i > 1$.



مجموع جملات دنباله درجه دوم

مقدمه: دانش آموزان عزیز در مقاله قبلی با مفهوم دنباله درجه دوم و جمله عمومی آن که به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ است آشنا شده‌اید. در این مقاله قصد داریم تا روشی برای محاسبه مجموع n جمله اول دنباله درجه دوم به دست آوریم.

با جمع کردن طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ + 3(1 + 2 + \dots + n) + (1 + 1 + \dots + 1)$$

با جایگذاری در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ + 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n \\ \Rightarrow (n+1)^3 - 1^3 - 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n \\ = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ \Rightarrow (n+1)^3 - (n+1) - 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

با فاکتورگیری از $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ در سمت چپ تساوی خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)(2(n+1)^2 - 2 - 3n) \\ = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ \Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n) \\ = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

در کتاب ریاضی ۱ پایه دهم با دنباله مثلثی $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ آشنا شده‌اید. همچنین مشاهده کردید که مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

اکنون می‌خواهیم یک رابطه برای مجموع مربعات (مجذورات) اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n به دست آوریم.

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = ?$$

برای این منظور بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای داریم:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \Rightarrow (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ \Rightarrow (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 *$$

با جایگذاری $n=1$ و $n=2$ و $n=3$ و $\dots$ و $n=n$ در رابطه * داریم:

$$n=1 \Rightarrow 2^3 - 1^3 = 3(1)^2 + 3(1) + 1$$

$$n=2 \Rightarrow 3^3 - 2^3 = 3(2)^2 + 3(2) + 1$$

$$n=3 \Rightarrow 4^3 - 3^3 = 3(3)^2 + 3(3) + 1$$

$\vdots$

$$n=n \Rightarrow (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

بنابر رابطه‌های گفته شده، خواهیم داشت:

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)a + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)b + nc$$

رابطه به‌دست آمده فرمول محاسبه مجموع n جمله اول دنباله درجه دوم است.

مثال ۱

مجموع ده جمله اول دنباله $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ را به‌دست آورید.

حل:

دنباله داده شده، دنباله مربعات اعداد طبیعی با جمله عمومی $t_n = n^2$ است، بنابراین: $a = 1$ و $b = c = 0$.
برای به‌دست آوردن مجموع ده جمله اول دنباله $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ خواهیم داشت:

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)a + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)b + nc$$

$$\Rightarrow S_{10} = \left(\frac{10(11)(21)}{6}\right)(1) + \left(\frac{10(11)}{2}\right)(0) + 10(0)$$

$$S_{10} = 385 + 0 + 0 = 385$$

مثال ۲

مجموع بیست جمله اول دنباله درجه دوم زیر را به‌دست آورید.

$$8, 13, 20, 29, 40, \dots$$

حل:

ابتدا با حل دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر جمله عمومی دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_1 = a + b + c \\ w_1 = t_2 - t_1 = 3a + b \\ z_1 = w_2 - w_1 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = a + b + c \\ 5 = 3a + b \\ 2 = 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 5 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)(2n^2 + n) = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)(n)(2n+1) = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

در نتیجه رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مجموع جملات دنباله درجه دوم

اگر دنباله t_n یک دنباله درجه دوم با جمله عمومی $t_n = an^2 + bn + c$ باشد، آنگاه:

$$t_1 = a + b + c$$

$$t_2 = 4a + 2b + c$$

$$t_3 = 9a + 3b + c$$

$$t_4 = 16a + 4b + c$$

:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

مجموع n جمله اول دنباله درجه دوم t_n با نماد S_n نشان داده می‌شود و خواهیم داشت:

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots + t_n$$

$$\Rightarrow S_n = (a + b + c) + (4a + 2b + c)$$

$$+ (9a + 3b + c) + (16a + 4b + c)$$

$$+ \dots + (an^2 + bn + c)$$

$$\Rightarrow S_n = (a + 4a + 9a + 16a + \dots + an^2)$$

$$+ (b + 2b + 3b + 4b + \dots + bn)$$

$$+ (c + c + c + c + \dots + c)$$

$$\Rightarrow S_n = (1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2) a$$

$$+ (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) b$$

$$+ (1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1) c$$

$$\Rightarrow S_n = (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) a$$

$$+ (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) b$$

$$+ (1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1) c$$

تذکره اندیشه: آیا می‌توانید با توجه به مطالبی که در این مقاله به آن‌ها اشاره شد رابطه‌ای برای محاسبه مجموع جملات دنباله درجه سوم $t_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ به دست آورید؟ منتظر جواب‌های شما عزیزان در این رابطه هستیم.

منابع

۱. بهزاد، م.، کاظمی، س.، کافی، ع. ۱۳۷۰. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، نویندگان توماس، ج.، فینی، ر. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
2. Ochieng, R.C., Chikunji, C.J and Onyango-Otieno, V.2021, Quadratic Sequences in Pythagorean Triples. Asia-Pacific Conference on Applied Mathematics and Statistics.

در نتیجه جمله عمومی دنباله t_n به صورت زیر است:

$$t_n = n^2 + 2n + 5$$

برای به دست آوردن مجموع بیست جمله اول دنباله

۸، ۱۳، ۲۰، ۲۹، ۴۰، ... خواهیم داشت:

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)a + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)b + nc$$

$$\Rightarrow S_{20} = \left(\frac{20(21)(41)}{6}\right)(1) + \left(\frac{20(21)}{2}\right)(2) + 20(5)$$

$$\Rightarrow S_{20} = 2870 + 420 + 100 = 3390$$

در پایان این مقاله، از دانش‌آموزان عزیز انتظار می‌رود که:

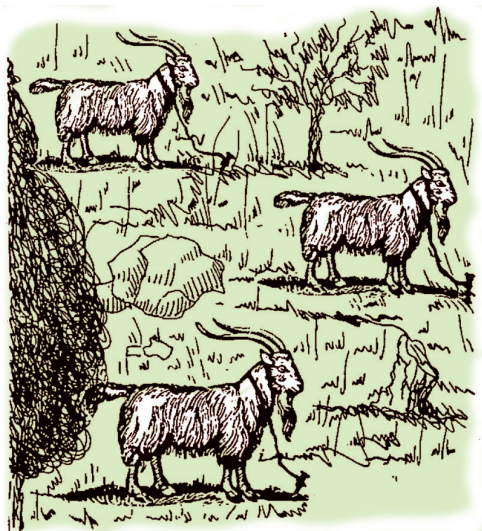
الف) مجموع جملات مربعات اعداد طبیعی از ۱ تا n را

به دست آورند.

ب) مجموع جملات دنباله درجه دوم را به دست آورند.

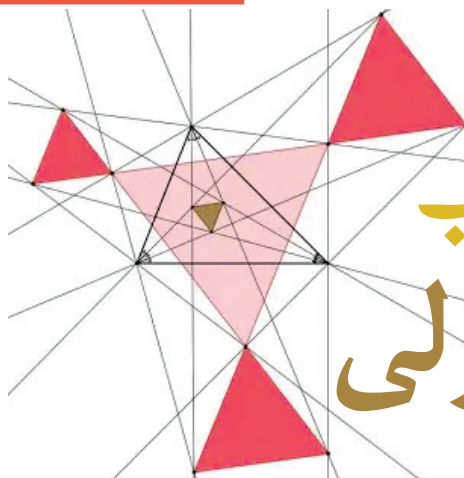
تفریح اندیشه

..... مرا محصور مکن



سه بز، چمنی محصور به مساحت ۱۲۰ مترمربع و به شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع را می‌چرند. هریک از بزها با طناب به گوشه‌ای متفاوت از چمن بسته شده و طول طناب‌ها چنان است که هر بز می‌تواند به وسط حصار مقابل برسد. اگر در نظر بگیریم که هر بز تمام سطحی را که به تنهایی می‌تواند به آن برسد، نیمی از سطحی را که دو بز در آن شریکند، و یک سوم سطحی را که هر سه بز در آن مشترکند، می‌چرد، روی هم رفته چه سطحی را می‌چرد؟

پاسخ: هر بز می‌تواند به مساحت ۶۰ مترمربع دسترسی داشته باشد. اگر فرض کنیم هر بز به یک گوشه وصل شده باشد، مساحتی که هر بز می‌تواند به آن دسترسی داشته باشد، یک ششم از مساحت کل است. پس مساحتی که هر بز می‌تواند به آن دسترسی داشته باشد، ۶۰ مترمربع است. اگر هر سه بز را با هم جمع کنیم، مساحتی که هر سه بز می‌توانند به آن دسترسی داشته باشند، ۱۸۰ مترمربع است. اما مساحت کل ۱۲۰ مترمربع است. پس مساحتی که هر سه بز می‌توانند به آن دسترسی داشته باشند، ۱۲۰ مترمربع است.



بحثی در باب قضیه مورلی

مقدمه: در سال ۱۸۹۹ میلادی فرانک مورلی (Frank-Morley) قضیه‌ای جالب در مورد مثلث مطرح کرد که به عقیده بعضی نویسندگان یکی از جالب‌ترین و اسرارآمیزترین قضیه‌های هندسه اقلیدسی در قرن بیستم است آن هم در سطح مقدماتی، به همین دلیل بعضی این قضیه را معجزه مورلی می‌نامند و آن را در ردیف یکی از صد قضیه بزرگ در ریاضی قرار داده‌اند. بیش از ۲۰۰ اثبات مختلف در مورد قضیه مورلی در کتاب‌ها و مجلات ریاضی و به‌ویژه سایت‌های مختلف بیان شده است که دو راه حل بسیار ساده و قابل درک برای دانش‌آموزان را در اینجا قید می‌کنیم.

روش اول از ریاضیدان هندسی، نارانی‌نگار (Naraniengar) و روش دوم از آقای دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده می‌باشد.

ابتدا صورت قضیه را مطرح می‌کنیم:

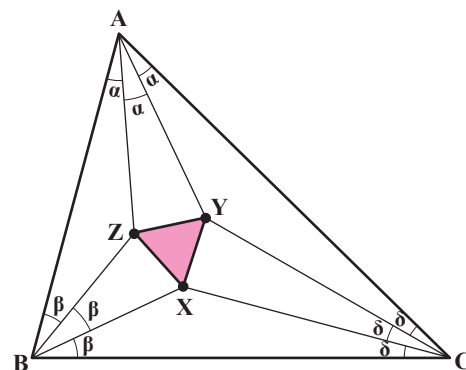
قضیه مورلی: هرگاه در داخل مثلث از هر رأس، دو نیم‌خط رسم کنیم تا زاویه آن رأس را به سه قسمت برابر تقسیم کند، از برخورد هر دو نیم‌خط مجاور به ضلعی از مثلث، نقاطی پدید می‌آیند که رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

لم: چهار نقطه Y, Z, Y', Z' که در شرط‌های:

$$Y'Z = ZY = YZ'$$

(الف) $2\theta = m(Y'ZY) = m(ZYZ') = \pi - 2\alpha > \frac{\pi}{3}$ (ب)

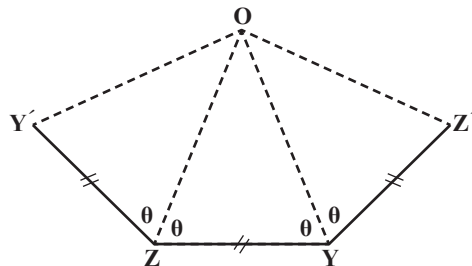
صدق کنند، بر یک دایره واقع‌اند، علاوه بر آن، نقطه A که با Y در یک طرف خط $Y'Z'$ واقع نباشد و $m(Y'AZ') = 3\alpha$ باشد، نیز بر همان دایره واقع است.



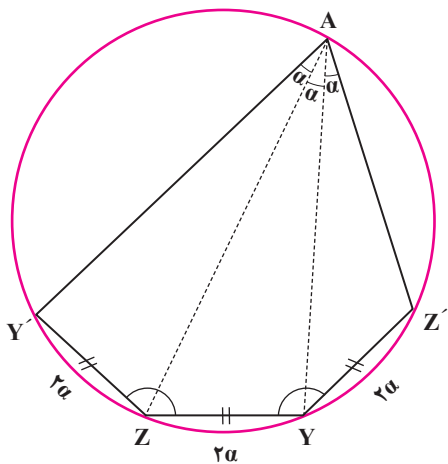
قرار داد: در مثلث ABC ، مثلث XYZ (شکل فوق) را مثلث مورلی می‌نامند.

قبل از بیان برهان نارانی‌نگار، لازم است که لم مقابل ثابت شود.

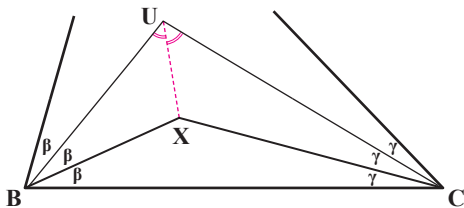
● **اثبات:** نیمسازهای دو زاویه $Y'ZY$ و ZYZ' در O برخورد می کنند.



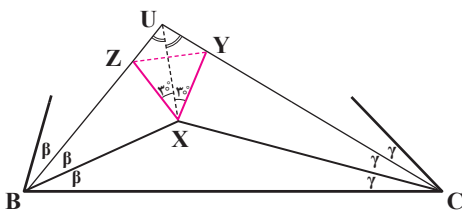
مثلث های OYZ' و OYZ و $OY'Z$ با هم برابرند (ض-ض-ض) و متساوی الساقین می باشند یعنی $OY' = OZ = OY = OZ'$ و اندازه هر یک از زاویه های مجاور به قاعده آنها $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ است. بنابراین چهار نقطه Y, Z, Y', Z' بر دایره به مرکز O واقع اند. در این دایره هر یک از کمان های $Y'Z, YZ'$ و YZ برابرند با اندازه زاویه مرکزی، یعنی: $2\alpha = \pi - (\pi - 2\theta) = \pi - 2\theta$.



اکنون روش اثباتی که نارائینگار مطرح کرد را بیان می کنیم. مطابق شکل نیم خط هایی که زوایای B و C را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده اند یکدیگر را در U و X قطع می کنند. در مثلث BCU ، نقطه X محل برخورد نیمسازهای دو زاویه داخلی است پس XU نیز نیمساز U است.



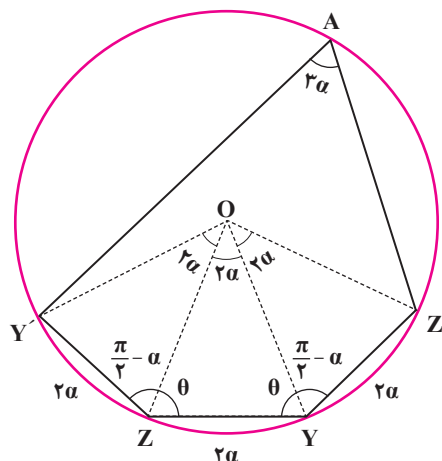
از نقطه X در دو طرف XU زوایای 30° را جدا می کنیم تا CU را در Y و BU را در Z قطع کنند.



دو مثلث XYU و XZU همنهشت هستند (ض-ض-ض)

$$\left. \begin{array}{l} XY = XZ \\ m\angle zxy = 60^\circ \end{array} \right\} \text{ در نتیجه } UZ = UY \text{ و با توجه به}$$

نتیجه می گیریم که مثلث XYZ متساوی الاضلاع است.

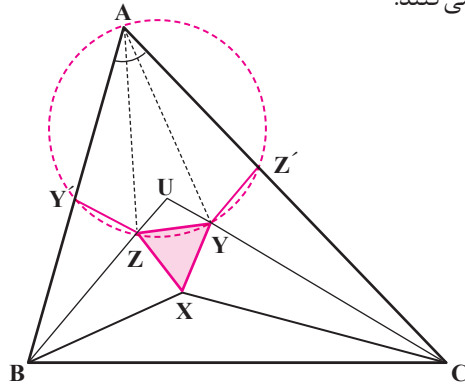


پس کمان $Y'Z'$ که شامل Y نیست، کمان در خود زاویه $\frac{2\alpha + 2\alpha + 2\alpha}{2}$ یعنی کمان در خود زاویه 3α است.

بنابراین نقطه A با شرط های گفته شده، بر این کمان قرار دارد.

نتیجه: هرگاه شرایط لم فوق برقرار باشد آنگاه AZ و AY ، زاویه $Y'AZ'$ را به سه قسمت برابر تقسیم می کند.

مشاهده می‌کنیم که شرایط لم اثبات شده، برقرار است. پس پنج نقطه A و Y' و Z و Y و Z' بر یک دایره واقع‌اند و AZ و AY همان امتدادهایی هستند که زاویه A را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

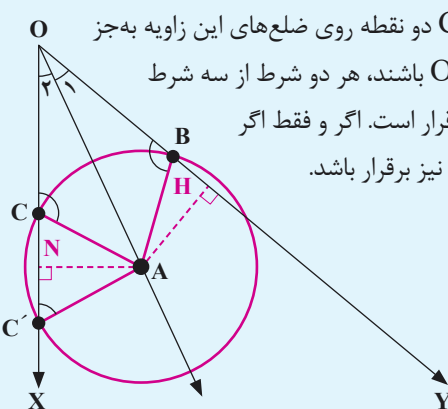


حال مشاهده می‌کنیم سه نقطه تعیین شده X ، Y و Z که با آن‌ها مثلث متساوی‌الاضلاع را ساختیم در واقع همان محل تلاقی نیم‌خط‌هایی هستند که هر یک از زوایای مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

آقای دکتر کرم‌زاده با بیان یک قضیه ساده در مورد نیمساز زاویه که از زمان اقلیدس تا به حال دیده نشده بود (که آن را لم کرم‌زاده می‌نامیم) به همراه یک قضیه جهت معادل سازی برای متساوی‌الاضلاع بودن مثلث مورلی، توانستند اثباتی ساده برای قضیه مورد بحث ارائه دهند.

لم کرم‌زاده: فرض کنیم A نقطه‌ای درون زاویه $\angle XOY$ و

B و C دو نقطه روی ضلع‌های این زاویه به جز نقطه O باشند، هر دو شرط از سه شرط زیر برقرار است. اگر و فقط اگر سومی نیز برقرار باشد.



(۱) A روی نیمساز $\angle XOY$ واقع است.

(۲) $AB = AC$

(۳) زاویه‌های $\angle OCA$ و $\angle OBA$ یا هم اندازه‌اند یا مکمل‌اند.

$$\begin{cases} \triangle BCU : m\angle U = \pi - 2\beta - 2\gamma \\ \triangle YZU : m\angle U = \pi - 2m\angle UZY \\ = \pi - 2m\angle UYZ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$m\angle UZY = m\angle UYZ = \beta + \gamma$$

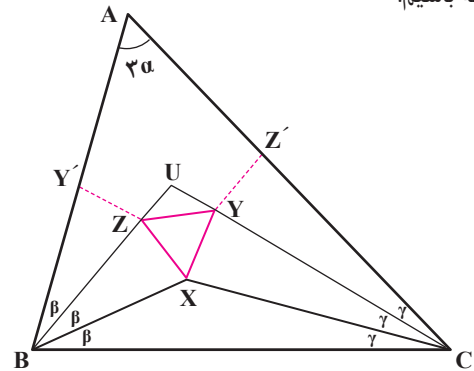
بافرض $m\angle A = 3\alpha$ و با توجه به اینکه $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$

نتیجه می‌گیریم که $m\angle YZU = \beta + \gamma = \frac{\pi}{3} - \alpha$ و در

$$m\angle XZU = \frac{2\pi}{3} - \alpha$$

روی BA و CA به ترتیب Y' و Z' را چنان انتخاب می‌کنیم

تا داشته باشیم:



$\triangle BZX = \triangle BZY'$ و $CX = CZ'$ و $BX = BY'$ در این صورت $\triangle CXY = \triangle CZ'Y$ (ض - ض - ض)

در نتیجه: $Y'Z = XZ = ZY = XY = YZ'$ ، با توجه به تساوی دو زاویه $Y'ZB$ و XZB نتیجه می‌گیریم که مکمل آنها نیز باهم برابرند، پس:

$$m\angle Y'ZU = m\angle XZU = \frac{2\pi}{3} - \alpha$$

در نتیجه:

$$m\angle Y'ZY = m\angle Y'ZU + m\angle UZY$$

$$= (\frac{2\pi}{3} - \alpha) + (\frac{\pi}{3} - \alpha) = \pi - 2\alpha$$

و همچنین اندازه زاویه ZZY' برابر است با $\pi - 2\alpha$ و

$$\alpha = \frac{A}{3} < \frac{\pi}{3}$$

با توجه به:

$$\begin{cases} Y'Z = ZY = YZ' \\ m\angle Y'ZY = m\angle ZYZ' = \pi - 2\alpha \\ m\angle A = 3\alpha \end{cases}$$

نتیجه می شود $ZY = ZX$ بنابراین $\triangle XYZ$ متساوی الاضلاع است.

برعکس: فرض کنیم $\triangle XYZ$ متساوی الاضلاع باشد. باید ثابت کنیم $\angle 1 \cong \angle 4, \angle 2 \cong \angle 5, \angle 3 \cong \angle 6$ چون X روی نیمساز $\angle BMC$ است و $XZ = XY$ بنابر لم کرم زاده $\angle 1 \cong \angle 4$ یا $\angle 2 \cong \angle 5, \angle 3 \cong \angle 6$ باید ثابت کنیم حالت مکمل امکان ندارد.

$$BCYZ: \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 60^\circ \\ 2\beta + 2\gamma + m\angle 1 + 60^\circ + 60^\circ \\ + m\angle 4 = 360^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(60^\circ - \alpha) + m\angle 1 + m\angle 4 = 240^\circ$$

که اگر $\angle 1$ و $\angle 4$ مکمل هم باشند داریم $\alpha = 30^\circ$ و در نتیجه $m\angle A = 90^\circ$. حال اگر $\angle 2$ یا $\angle 5$ یا $\angle 3$ یا $\angle 6$ نیز مکمل هم باشند، آنگاه می باید مثلث ABC دارای ۲ زاویه قائمه شود که در هندسه اقلیدسی غیرممکن است. پس فرض کنیم $\angle 1$ و $\angle 4$ مکمل یکدیگرند ولی $\angle 2 \cong \angle 5$ و $\angle 3 \cong \angle 6$ باشد که در این صورت داریم:

$$\angle 3 \cong \angle 6 \xrightarrow{CXZA} m\angle 3 = m\angle 6 = 60^\circ + \beta$$

$$\angle 2 \cong \angle 5 \xrightarrow{ABXY} m\angle 2 = m\angle 5 = 60^\circ + \gamma$$

با توجه به مجموع زوایای هم رأس در Z داریم:

$$180^\circ - (\alpha + \beta) + m\angle 1 + 60^\circ + m\angle 6 = 360^\circ$$

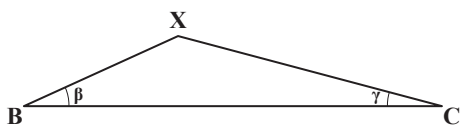
$$\Rightarrow m\angle 1 = 60^\circ + \alpha = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

یعنی $m\angle 1 = m\angle 4 = 90^\circ$ و به همین ترتیب $\angle 2 \cong \angle 5$

$\angle 3 \cong \angle 6$ یعنی عکس قضیه هم برقرار است.

آقای دکتر کرم زاده بر پایه لم و قضیه بیان شده، برهان زیر را برای قضیه مورلی ارائه کردند.

اثبات: فرض کنیم در مثلث ABC داشته باشیم: $m\angle A = 3\alpha, m\angle B = 3\beta, m\angle C = 3\gamma$ که نشان می دهد $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. سه مقدار X, Y, Z را به صورت $X = 60^\circ + \alpha, Y = 60^\circ + \beta, Z = 60^\circ + \gamma$ در نظر می گیریم.



● **اثبات:** اگر AB و AC بر دو ضلع زاویه عمود باشند که همان ویژگی شناخته شده نیمساز زاویه است و ثابت است، پس فرض کنیم AB و AC بر دو ضلع زاویه عمود نباشند، در نتیجه عمود AH را بر OB و عمود AN را بر OC رسم می کنیم. پس دو مثلث قائم الزاویه $\triangle ABH$ و $\triangle ACN$ (یا $\triangle AC'N$) را داریم. اگر (۱) و (۲) برقرار باشند،

$$\triangle ABH \cong \triangle ACN \cong (\triangle AC'N)$$

(وتر و یک ضلع زاویه قائمه)

در نتیجه:

$$\angle ABH \cong \angle ACN \cong (\angle AC'N)$$

بنابراین $\angle OBA \cong \angle OCA$ یا $\angle OBA \cong \angle OCA$ مکمل $\angle AC'N$

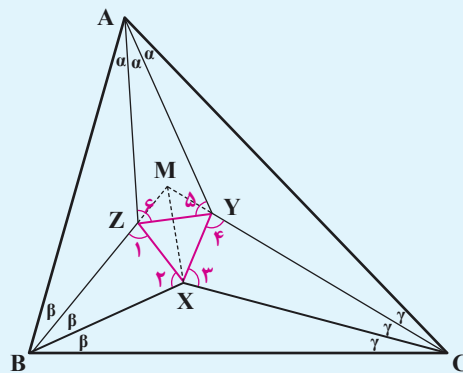
است. اگر (۱) و (۳) برقرار باشند، باز بنابر همنهشتی یک ضلع و زاویه حاده در مثلث های قائم الزاویه نتیجه می گیریم $AB = AC = AC'$.

اگر (۲) و (۳) برقرار باشند، بنابر همنهشتی وتر و یک زاویه حاده در مثلث های قائم الزاویه نتیجه می گیریم، $AN = AH$ بنابراین A روی نیمساز $\angle XOY$ است.

قضیه: در هر مثلث ABC ، مثلث XYZ (مثلث مورلی)

متساوی الاضلاع است اگر و فقط اگر مطابق شکل:

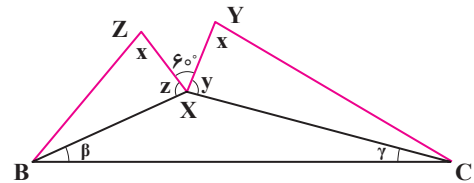
$$\angle 3 \cong \angle 6, \angle 2 \cong \angle 5, \angle 1 \cong \angle 4$$



● **اثبات:** فرض کنیم تلاقی CY و BZ نقطه M باشد. CX و BX و MX نیمسازهای $\triangle BMC$ هستند.

اگر $\angle 1 \cong \angle 4$ چون X روی نیمساز $\angle M$ است بنا به لم کرم زاده داریم: $XZ = XY$ و به همین ترتیب از $\angle 2 \cong \angle 5$

مثلاً BCX را چنان می‌سازیم که زاویه‌هایی که ضلع‌های آن شامل BC باشد به اندازه‌های β و γ باشند.

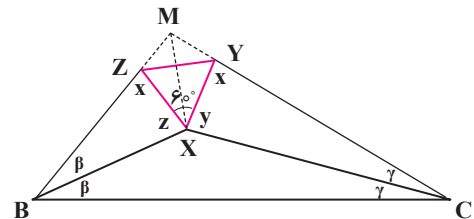


سپس مثلث‌های $\triangle CXY$ و $\triangle BXZ$ را به ترتیب روی ضلع‌های CX و BX با زاویه‌هایی به اندازه x , y و z مطابق شکل می‌سازیم. بدیهی است که $m\angle ZXY = 60^\circ$ زیرا:

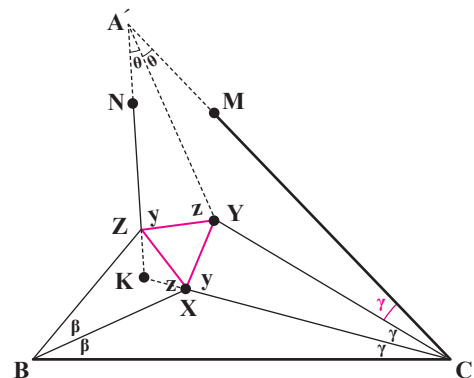
$$m\angle ZXY = 360^\circ - (y + z + 180^\circ - \beta - \gamma) = 60^\circ$$

دار این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \triangle XCY: \quad & \begin{cases} m\angle XCY = 180^\circ - x - y \\ = 60^\circ - (\alpha + \beta) = \gamma \end{cases} \\ \triangle XBZ: \quad & \begin{cases} m\angle XBZ = 180^\circ - x - z \\ = 60^\circ - (\alpha + \gamma) = \beta \end{cases} \end{aligned}$$



اگر نقطه تلاقی امتداد CY و BZ را M بنامیم، BX و CX و MX نیمسازهای مثلث BCM خواهند بود که با توجه به لم بیان شده داریم: $XZ = XY$ پس مثلث XYZ متساوی‌الاضلاع است. اکنون از C نیم‌خط CM و از Z نیم‌خط ZN را چنان رسم می‌کنیم تا داشته باشیم: $m\angle YCM = \gamma$ و $m\angle YZN = y$

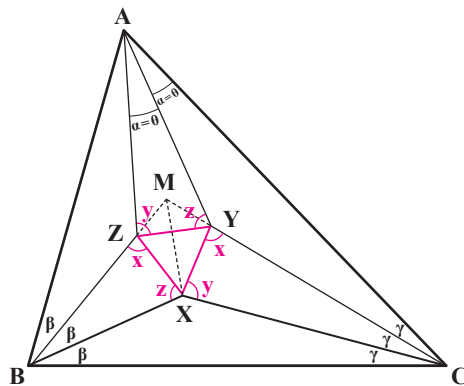


نقطه تلاقی این دو نیم خط را A' می‌نامیم. با توجه به این که $YX = YZ$ و $m\angle YXC = m\angle YZA' = y$ می‌گیریم که Y روی نیمساز $\angle A'KC$ واقع است و چون Y روی نیمساز $\angle XCA'$ هم قرار داشت نتیجه می‌گیریم که Y روی نیمساز $\angle CA'Z$ هم قرار دارد.

پس:

$$m\angle YA'Z = m\angle YA'C = \theta$$

اکنون با توجه به مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی چهارضلعی $CXZA'$ داریم:



$$2\gamma + y + 60^\circ + 60^\circ + y + 2\theta = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma + y + \theta = 120^\circ \Rightarrow \gamma + \beta + \theta = 60^\circ$$

در نتیجه $\theta = \alpha$ و در مثلث $A'ZY$ داریم: $m\angle A'YZ = z$ زیرا:

$$m\angle A'YZ = 180^\circ - (y + \alpha)$$

$$= 120^\circ - (\alpha + \beta) = 60^\circ + \gamma = z$$

بنابراین، مثلث یکتای $ZA'Y$ روی ZY با زوایای y, z, θ ساخته شده است.

مشابه آن، اگر به جای C و Z نقطه‌های B و Y را انتخاب کنیم و مرحله‌های فوق را انجام دهیم، به همان مثلث یکتای $\triangle YZA'$ می‌رسیم که $m\angle YA'Z = m\angle ZA'B = \alpha$ و در نتیجه $\triangle A'BC \cong \triangle ABC$ و A' همان A است و اثبات کامل است.

منابع

۱. بازآموزی و بازشناخت هندسه - انتشارات دفتر امور کمک آموزشی و کتابخانه‌ها - ترجمه عبدالحسین مصحفی
۲. مبانی هندسه - انتشارات مبتکران - تألیف محمود نصری

داستان اعداد

قسمت سوم



اشاره

یاران همیشگی سلام ...

نمی‌دانید چقدر مشتاقم تا باز هم موقع و موعد ارائه داستان جدیدی از این زیباترین اسرار ریاضی برسد. چرا که فراگرفتن آن هم تاریخ زیبای ریاضی است، هم داستانی از آنچه از ابتدا آموختیم و تا انتها با ما خواهد بود. در شماره قبلی به اعتقاد فیثاغورسیان و عقیده آن‌ها در مورد جهان هستی و رابطه موسیقی و اعداد و ... پرداختیم. در این شماره می‌خواهم به سراغ افلاطون و ارسطو و عرفان هم بروم تا باز هم در اعماق تاریخ غوطه‌ور شویم و نه تنها خفه نشویم بلکه پرنفس‌تر بر آییم!

می‌انگاشتند و باور داشتند که تمام گنبد آسمان آهنگ و عدد است. یکی از تجلیات اعداد را عدالت دانسته می‌شد و دیگری نَفَس یا عقل بود؛ زمان و مناسبت‌ها اشکال دیگر تجلی اعداد بودند و همین‌طور اصولاً هر چیزی که وجود دارد و آنان روابط میان اعداد و آهنگ‌ها را از یک‌سو و ویژگی‌ها و بخش‌ها و بخش‌های آسمان و همه موجودات جهان را از سوی دیگر گرد می‌آوردند و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کردند و اگر چیزی کم بود، سرشتی مصنوعی به تولید نسبت، در هر جای نظام کمک می‌کرد. مثلاً تصور می‌شد که ۱۰ کامل‌ترین عدد است و کل قلمرو اعداد را دربرمی‌گیرد در نتیجه باید در آسمان نیز ۱۰ جرم باشد که به شکل ستاره بگردند، اما چون جرم مرئی داریم، آنان یک جرم و دهم ابداع کردند، همان ضد زمین نامرئی. ارسطو عدد ۴ را عدد عدالت می‌دانست چون $2 \times 2 = 4$ و ۴ را اولین مربع کامل می‌خواند از این رو آن را عین عدالت می‌دانست.

فیثاغورسیان کوشیدند تا ۱۰ جرم کیهانی را کشف کنند و در نظام کیهانی خود جای دهند و در غیاب جرم دهم آن را ابداع کردند. ارسطو (۳۸۴-۳۲۲ ق. م) در کتاب نخست مابعدالطبیعه از عرفان عددی فیثاغورسیان انتقاد کرد. او می‌گوید آنان چون کاملاً در ریاضیات غرق شده‌اند گمان می‌کنند اصول عددی ایشان اصول همه موجودات است.

«چون در ریاضیات اعداد بطور طبیعی نخستین چیزهایند فیثاغورسیان می‌پنداشتند که می‌توان در اعداد شباهت‌های فراوانی را میان چیزهایی که وجود دارند و به‌وجود خواهند آمد مانند عناصر آتش، هوا، خاک و آب مشاهده کرد. همچنین ویژگی‌ها و نسبت‌های نُت‌های موسیقی را در اعداد یافت و این‌گونه عناصر اعداد را هر موجودی می‌دانستند، چنان‌که گویا همه چیز بر پایه اعداد تشکیل شده است و خود اعداد را نخستین چیز در تمام طبیعت

افلاطون هم از منتقدان بزرگ فیثاغورسیان بود اما چون همواره به دنبال اندازه‌گیری حیات و هماهنگی بین آن با مترو معیار فلسفی خودش بود در جاهایی پذیرفت که اعداد کلیدهایی برای حل معماهای رازگونه خلقت هستند. سرانجام تفکرات فیثاغورسی و اندیشه‌های افلاطونی در مکاتب نوافلاطونی و نظام‌های غنوصی ادامه یافت و یک عرفان عدد را به وجود آورد که بگوید «اعداد بر طبیعت اشیاء تحت امر خود اثر می‌گذارند و میان خداوند و جهان آفرینش واسطه هستند» با این روش هر عدد سرشتی مخصوص و رازدار خود با معنای متافیزیکی می‌پرورد. این مکتب (نظام نوافلاطونی) تأثیری عمیق

بر نگرش‌های عرفانی سه دین ابراهیمی یهودیت، مسیحیت و اسلام گذاشته است.

فیلولی اسکندرانی با دنبال کردن این خط فکری اندیشه‌هایی از عهد عتیق و تفکرات فیثاغورسیان را درهم آمیخت و اساس کتاب مقدس در قرون وسطا را بنا کرد. قبلاهی یهود در قرون وسطا یکی از بزرگ‌ترین پیشرفت‌های سنت فیثاغورسی است که در آن عرفان عددی پیچیده‌ای ریشه کرده است در قبلا واحدهای ده‌گانه‌ای داریم که خودشان به هم وابسته‌اند و ۲۲ حرف الفبای عبری پل‌های بین آن‌ها هستند. در قبلا واحد ازیلی به سفیروت ده‌گانه (از سافر به معنی شمردن) تقسیم می‌شود.

بالاترین سفیرا کِتر (تاج) است که از آن حکمت و هوش جوانه می‌زند. سفیرای چهارم حِسِد (محبت) یا گِدولا (بزرگی) پنجم گِوورا (عدالت) ششم تِیفِرَت (زیبایی) هفتم نِیَصا (نصر) هشتم هود (حلال)، نهم سود (بنیاد) دهم مَلخوت (قلمرو) هستند.

اکنون باز هم بحث را همین‌جا رها می‌کنیم تا در شماره بعد به سراغ عرفان اسلامی و نمادگرایی عددی قرون وسطایی برویم. اما در این شماره می‌خواهم به معرفی عدد ۲ بپردازم.

عدد ۲ بعد از عدد ۱ دوگانگی را برایمان تداعی می‌کند. جالب است توازن (ترازو)، سکون تعادل (الاکلنگ) قطب‌های مثبت و منفی و ... همگی عدد ۲ را ظاهر هر می‌سازند.

یک، مظهر نقطه بود و «دو» نمایانگر طول، دو اولین عددی که از وحدت دوری می‌کند. جالب است دوری کردن از یکتایی شروع انحراف و گناه است دو هم از یکی بودن دوری می‌کند نماد انحراف

از خیر و منشا نفاق است، دو نشان‌دهنده همه دو نیمگی هاست، از طرف دو می‌تواند نمادی برای رقابت باشد و مایه رحمت، اگر ابرها دو تا نباشند (منیت و منفی) باران نخواهد بارید. اگر تفاوت‌ها نباشد زندگی زیبا نیست اگر دو پا نباشد راه رفتن دشوار است.

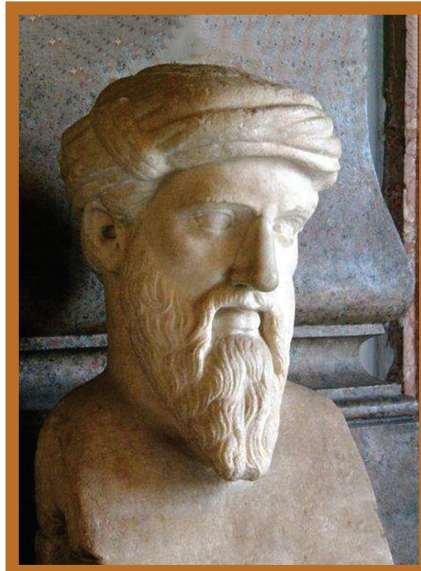
جالب است دو نیمه شدن نشانه ضعف است و دو برابر شدن نماد قدرت (این ویژگی بر همه اعداد طبیعی جر یک قابل بیان است)

یونانیان باستان دو را نماد مبدا «زنانگی» و «مادر بودن» نسبت می‌دادند چون مخالف یکتایی بود آنرا عدد شیطان نامیدند.

افلاطون می‌گوید: «دو رقمی است بدون معنا و دال بر ارتباطی که به وجود آورنده عامل سوم است»

در کیمیاگری دو معنای «امتداد، ماه و خورشید، شاه و شاه‌بانو، گوگرد در حیوه که در ابتدا ضد هم هستند و سرانجام واحد می‌شوند» را دارد.

یهودی‌ان می‌گویند خداوند جهان را بر پایه دو قرار داده است. مصریان در داستان‌های کهن آورده‌اند که هوروس دووجه دارد یکی هاروئیس (Haroeis) نامی که هوروس به آن خوانده می‌شد و دیگری هارپوکراش (Harpokrates) به شکل کودکی که انگشت خود را می‌مکد. در اساطیر هند، آگنی (خدای آتش)



دو وجهی است که یکی دلپسند و دیگر وحشتناک.

در ایران باستان عدد دو مبارزه اهورا مزدا و اهریمن نمایان شده آنان نبرد شب و روز را دارند که شب زمینی و روز آسمانی است. ژاپنی‌ها معتقدند که ایزانامی و اترانامی ازدواج کردند و ژاپن و خدایان آن‌ها به وجود آمدند.

در آفریقا آدم‌ها در سایه زندگی و مرگ، نیکی و بدی و ... زندگی می‌کنند کهن‌ترین و پر راز و رمزترین نماد جهان، تصویر دو مار به هم پیچیده دور چوبی قائم است که باستانی و جهانی است. در نرد مسیحیان طیب نماد دو است. «۱ و -» همان «زمین و آسمان» در یکی از تندیس‌های تخت جمشید دو ابوالهول از کوی بال‌دار محافظت می‌کنند.

پیامبر اکرم (ص) می‌فرمود: «اِخْتِلَافُ اُمَّتِي رَحْمَةٌ».

فعلاً خدا حافظی می‌کنم تا شماره بعد ... ، یا علی ...



مقدمه:

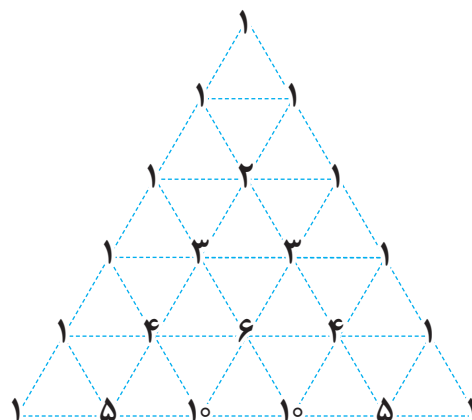
مثلث «خیام - پاسکال» توسط دانشمندان گوناگونی از هند و ایران و چین و غیره و بعدها در اروپا بررسی شده است و در زبان‌های گوناگون، نام‌های مختلفی دارد در زبان انگلیسی «مثلث پاسکال» ایتالیایی «مثلث تارتالیا» و در زبان فارسی مثلث خیام گفته می‌شود.

مثلث خیام^۱، مثلث پاسکال^۲، مثلث تارتالیا^۳ یا مثلث خیام - پاسکال به آرایش مثلثی شکل ضرایب بسط دو جمله‌ای گفته می‌شود.

در کتاب‌های درسی از این مثلث نام برده شده، لذا در این مقاله، این آرایه از اعداد و شگفتی‌های جالب آن را ارائه می‌کنم که امیدوارم برای شما مفید و جذاب باشد.

معرفی مثلث

در رأس و روی اضلاع این مثلث عدد ۱ قرار گرفته است.



و عددی‌های هر سطر مجموع دو عددی است که در بالا و سمت

چپ راست آن قرار دارند، مثلاً: $5 = 1 + 4$

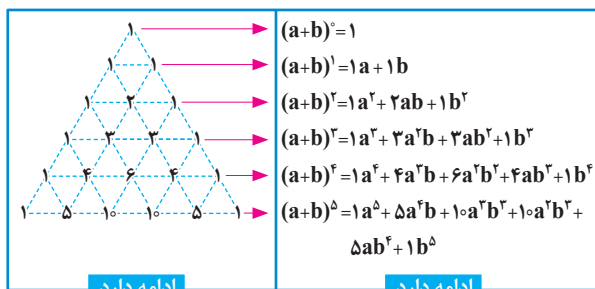
این اعداد را می‌توان با روش گفته شده ادامه دهید.

کاربرد:

مهم‌ترین کاربرد این مثلث محاسبه ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن است.

$$(a+b)^n = \square a^n + \square a^{n-1}b + \square a^{n-2}b^2 + \dots + \square ab^{n-1} + \square b^n$$

که مربع‌های کنار هر جمله ضرایب هستند که اعداد آن از طریق مثلث خیام و ترکیبات به دست می‌آید.



ادامه دارد

ادامه دارد

برای به‌دست آوردن ضرایب از طریق مثلث برای توان‌های بالا، کمی طولانی است زیرا باید اعداد مثلث را ادامه داد. این ضرایب را می‌توان از رابطه ترکیب نیز به‌دست آورد که به‌شرح زیر می‌باشد.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

به‌طور کلی ضریب جمله k ام از رابطه $\binom{n}{k-1}$ به‌دست می‌آید

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

که در آن:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

■ جذابیت‌ها (شگفتی‌های) مثلث :

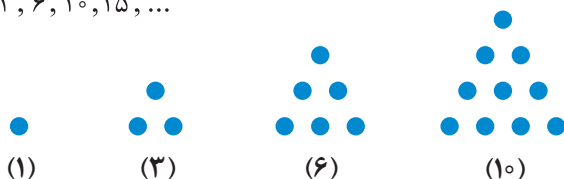
این مثلث به ظاهر ساده خواص بسیار جالب و حتی بدون اغراق شگفت‌انگیزی دارد که به آن‌ها می‌پردازیم.

■ خواص قطری:

(۱) اعداد روی دو ضلع کناری (قطرهای اول) همگی یک هستند.

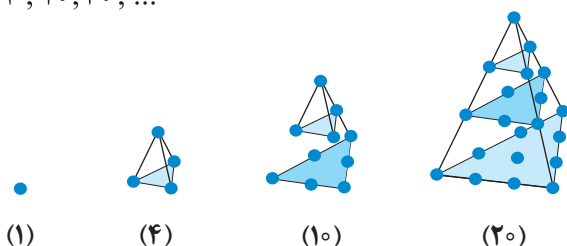
(۲) اعداد روی قطر دوم اعداد طبیعی را تشکیل می‌دهند.
۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ...

(۳) اعداد روی قطر سوم اعداد مثلثی را تشکیل می‌دهند.
۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ...



(۴) اعداد روی قطر چهارم اعداد تتراهدرال (Tetrahedral) یا هرم مثلث القاعده را می‌سازند ...

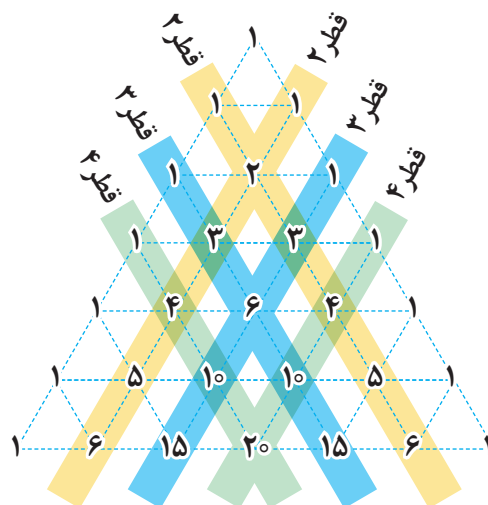
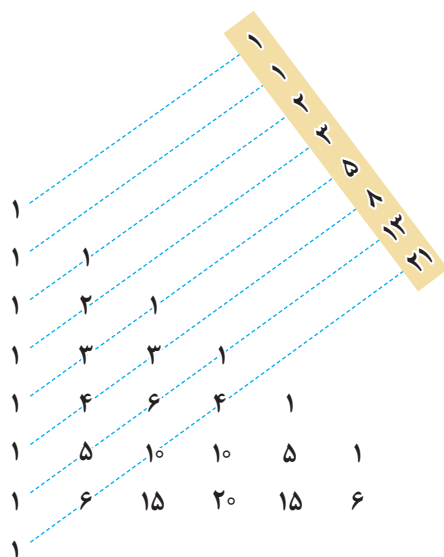
۱, ۴, ۱۰, ۲۰, ...



(۵) مجموع اعداد قطری دنباله معروف فیبوناچی را می‌سازد.

در دنباله فیبوناچی $a_1 = a_2 = 1$ و هر جمله از جمع دو جمله قبلی به‌دست می‌آید.

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ...



■ خواص سطری:

۳. اگر اعداد هر سطر را کنار هم بنویسیم توان‌های ۱۱ به دست می‌آید. (در هر سطر عدد را بسط دهدهی ببینید)

$$(11)^0$$

$$(11)^1 \Rightarrow 1(10) + 1$$

$$(11)^2 \Rightarrow 1(10)^2 + 2(10) + 1 = 121$$

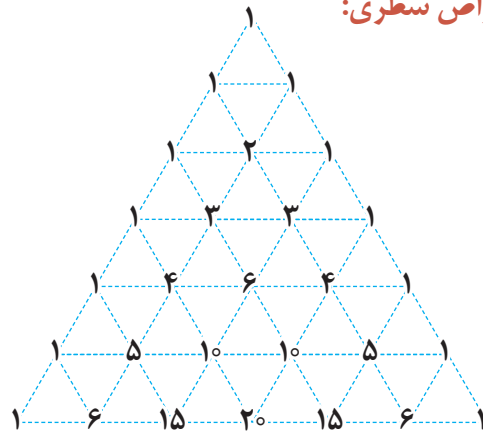
$$(11)^3 \Rightarrow 1(10)^3 + 3(10)^2 + 3(10) + 1 = 1331$$

$$(11)^4 \Rightarrow 1(10)^4 + 4(10)^3 + 6(10)^2 + 4(10) + 1 = 14641$$

$$(11)^5 \Rightarrow 1(10)^5 + 5(10)^4 + 10(10)^3 + 10(10)^2 + 5(10) + 1 = 161051$$

* همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای محاسبه 11^n کافی است اعداد سطر $n+1$ مثلث را کنار هم بنویسید و بسط دهدهی دهید.

یکی از مطالب جالب در این مثلث فراکتالی است که به مثلث سرپینسکی معروف است [برخال یا فراکتال یا فرکتال (Faractal) ساختاری است که هر جزء آن با کل آن متشابه است]^۲ مثلث سرپینسکی^۵ (Sierpinski Triangle) فراکتالی است که تشکیل می‌شود، تکرارها را باید بارها و بارها انجام دهیم، شکل‌های زیر، چهار مرحله اول ساخت این مثلث را نشان می‌دهد.



۱. اعداد هر سطر از دو طرف مثل هم است.

۲. مجموع اعداد هر سطر از مثلث، یکی از توان‌های دو است.

$$1 = 2^0$$

$$1 + 1 = 2 = 2^1$$

$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

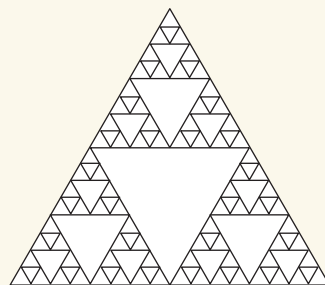
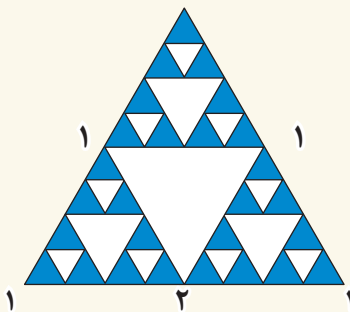
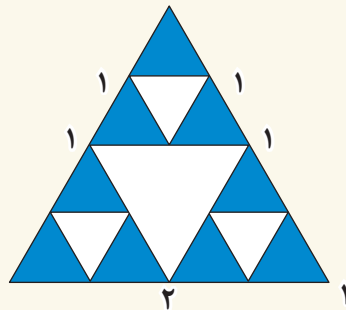
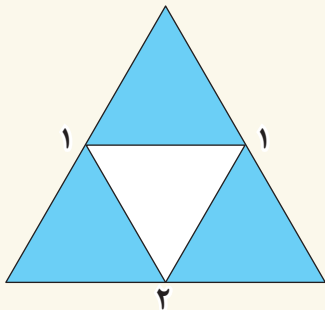
$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$$

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

ادامه دارد



تفریح اندیشه

کوتاه‌ترین فاصله

پس از سال‌ها جنگ و نزاع سخت در مورد حقوق برداشت آب در یک ده، مالکان دو گله‌داری L و K تصمیم به ساختن مخزن آبی با پمپ گرفتند، که به هر دو قسمت آب برساند، و در مورد جمیع جزئیات کار به استثنای مهم‌ترین آن‌ها، یعنی محل مخزن، دوستانه موافقت کردند. K، که از ریاضیات اطلاع چندانی نداشت و انجام امور را ساده در نظر می‌گرفت، گفت: بین L، گله‌داری تو در سه مایلی جنوب رودخانه است. مال من در پایین رودخانه به فاصله شانزده مایل از گله‌داری تو و در فاصله نه مایلی جنوب رودخانه است، که به طرف مشرق بین زمین‌های ما جاری است، بیا پمپ را در نقطه‌ای از ساحل رودخانه قرار دهیم که فاصله آن از هر دو گله‌داری یکی باشد. در این صورت به آسانی می‌شود محاسبه کرد که هزینه آبرسانی برای هر دو مان برابر می‌شود.

L گفت: راه ارزانتری هم موجود است. محلی در امتداد ساحل وجود دارد که در صورتی که پمپ را در آنجا نصب کنیم، کل طول مسیر به هر دو گله‌داری کمتر از هر جای دیگر می‌شود. اگر هزینه هر دو مسیر را به تساوی متقابل شویم هر دو پول کمتری پرداخت خواهیم کرد.

K جواب داد: بسیار خوب، اما این محل کجاست؟ L پاسخ داد: کمی وقت بده تا محاسبه کنم، در حال حاضر نیاز به یادآوری بعضی مطالب ریاضیات عالی دارم. روز بعد با هم ملاقات کردند و L اقرار کرد که قادر به حل مسأله نشده است. وی گفت: بیا نقشه تو را اجرا کنیم. می‌توانم آن را محاسبه کنم.

K گفت: اصلاً و ابداً. نقشه تو بهتر از نقشه من است و من می‌توانم بدون کمک گرفتن از ریاضیات عالی تو جای پمپ را مشخص کنم.

K چگونه مسأله را حل کرد؟

لغت‌نامه‌ای که در آنجا آمده که اگر کسی بخواهد از یک نقطه به یک نقطه دیگر برسد، باید از کوتاه‌ترین مسیر استفاده کند. این مسأله را می‌توان به این صورت بیان کرد: اگر دو نقطه در یک صفحه باشند، کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌ها یک خط مستقیم است. اما در اینجا ما با یک مسأله هندسی مواجه هستیم که نیاز به استفاده از هندسه دارد. ما می‌خواهیم یک نقطه را در یک خط مستقیم پیدا کنیم که فاصله آن از دو نقطه دیگر یکسان باشد. این مسأله را می‌توان به این صورت بیان کرد: اگر دو نقطه A و B در یک صفحه باشند، کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌ها یک خط مستقیم است. اما در اینجا ما با یک مسأله هندسی مواجه هستیم که نیاز به استفاده از هندسه دارد. ما می‌خواهیم یک نقطه را در یک خط مستقیم پیدا کنیم که فاصله آن از دو نقطه دیگر یکسان باشد.

شما هم می‌توانید خودتان این فراکتال را رسم کنید. یکی از مسائلی که مورد توجه ریاضی‌دانان بوده استفاده از مثلث در محاسبه مسائلی است که دو نمونه از آن در زیر آمده است. ۱. در یک خانواده ۵ فرزندی پیشامد آن که خانواده از ۳ دختر و ۲ پسر تشکیل شده باشد، چقدر است؟

پسر دختر
xy , yyy

$$(y+x)^5 = 1y^5 + 5y^4x + 10y^3x^2$$

$$+ 10y^2x^3 + 5yx^4 + 1$$

$$n(S) = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 \text{ جمع ضرایب}$$

$$n(A) = 10 : y^3x^2 \text{ ضریب}$$

$$p(A) = \frac{10}{32}$$

۲. از بین ۱۲ نفر تیم ۵ نفره بسکتبال انتخاب می‌کنیم چند گروه ۵ نفره می‌توان انتخاب کرد؟

$$(x+y)^{12} = 1x^{12} + 12x^{11}y + 66x^{10}y^2 + 220x^9y^3 + 495x^8y^4 + 792x^7y^5 + \dots$$

ج: ۷۹۲

امیدوارم این مقاله مورد توجه شما دانش‌آموزان عزیز قرار گرفته باشد البته باز هم جای بحث دارد که در آینده چه چیزهایی از این مثلث به‌دست می‌آید شما هم فکر کنید.

* پی‌نوشت‌ها

۱. خیام دانشمند ایرانی متولد (۵۱۷-۴۴۰ قمری)
۲. پاسکال دانشمند فرانسوی متولد (۱۶۴۲-۱۶۲۳ میلادی)
۳. نیکولو فونتا نا تارتالیا دانشمند ایتالیایی (۱۵۵۷-۱۵۰۰ میلادی)
۴. در شماره بعدی مجله مطالبی در رابطه با فراکتال‌ها ارائه خواهیم داد.
۵. رالفراف سرپینسکی ریاضی‌دان لهستانی (۱۹۶۹-۱۸۸۲)

منابع

۱. بهبودیان، جواد (۱۳۸۴) مثلث خیام - پاسکال - تهران - دانشگاه صنعتی شریف مؤسسه انتشارات علمی
۲. جعفری، سیامک (۱۳۸۶) مثلث خیام، هندسه فراکتال - تهران - جهاددانشگاهی واحد صنعتی امیرکبیر

3- <http://faradans.org>



از گذشته‌های نه‌چندان دور

حسن سالاری،

متولد ۱۳۵۵ در شهر

جاجرم استان خراسان شمالی،

مترجم، نویسنده، ویراستار علمی،

پژوهشگر در زمینه آموزش و پرورش بود.

تحصیلات مقدماتی را تا اخذ دیپلم در جاجرم گذراند و

در سال ۱۳۷۳ در رشته گیاه‌شناسی دانشگاه بوعلی سینا همدان

پذیرفته شد. حضور او در دانشگاه و آشنایی با استادان برجسته‌ای مانند

دکتر مرتضی عطری، تا حدودی مسیر زندگی او را تغییر داد.

دکتر عطری که شور و اشتیاق وی را در مسائل علمی مشاهده کرده بود، به او توصیه

کرد که برای آشنایی با جدیدترین دستاوردهای علمی بشر، حتماً زبان انگلیسی را به‌طور کامل

بیاموزد و آموختن زبان دریچه‌ای از دانش روز را به روی وی گشود. با تلاش فراوان از فضای مجازی و

سایت‌های معتبر علمی جدیدترین نتایج علوم را گاهی با نرم‌افزارهای خاص یک‌جا محتوی سایت را دریافت می‌کرد

تا با کمترین هزینه آن‌ها را سر فرصت بررسی کند. ایشان در سال ۱۳۸۰ با رتبه ۲ در مقطع کارشناسی ارشد رشته بیوشیمی

پزشکی دانشگاه تهران پذیرفته و در سال ۱۳۸۲ از آن‌جا فارغ‌التحصیل شد.

همزمان با تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد با مجلات رشد آموزش و پرورش همکاری می‌کرد و چند سال مدیر داخلی مجله رشد

آموزش زیست‌شناسی بود. به ترویج علم و معرفی نام‌آوران ایرانی بسیار علاقه‌مند بود و همواره سعی می‌کرد که تألیفات خود را به زبان

ساده و روان برای نوجوانان و جوانان عرضه کند. به همین دلیل کتاب‌های او بارها برنده جوایز متعدد شده بود که از جمله آن‌ها می‌توان به

سه‌بار دریافت جایزه کتاب سال، سه بار جایزه کتاب فصل و دوبار جشنواره کتاب‌های آموزشی رشد وزارت آموزش و پرورش و جایزه قلم

پرنده کانون پرورش فکری کودکان و نوجوانان را در سال ۱۳۹۸ از آن خود کرد.

از بین تألیفات ایشان می‌توان به کتاب‌های آموزش علوم و تاریخ علم اشاره کرد و مجموعه دوجلدی فرهنگ‌نامه طلایی کلید دانش از

نشر طلایی زیر نظر ایشان تهیه و تدوین شد. در نشریات و روزنامه‌های بیش از ۳۰۰ مقاله نوشت و به جهت در دسترس قرار گرفتن محتوی

آموزشی مناسب برای نوجوانان و جوانان، پایگاه اینترنتی «جزیره دانش» را راه‌اندازی کرد و در اولین سال شروع به کار از طرف وزارت مخابرات؛

رتبه برتر سایت‌های آموزشی را دریافت کرد.

سالاری پاک و بی‌تکبر بود، سادگی و ساده‌زیستی ایشان واقعاً عجیب بود، بسیاری از وقت‌ها شب‌ها با خوردن نان و ماست در اداره

کارش را تا پاسی از شب پیگیری می‌کرد.

سرانجام در ۱۹ دی‌ماه سال ۱۳۹۸ وقتی قصد عزیمت به زادگاه خود را داشت، در اثر سانحه واژگونی اتوبوس دارفانی را خیلی زودتر از

آن چیزی که می‌توان تصور کرد، وداع گفت. از ایشان یک فرزند دختر به نام صبا که هم‌اکنون در رشته کارشناسی علوم ورزشی تحصیل

می‌کند و یک فرزند پسر به نام شایان که در مقطع پنجم دبستان تحصیل می‌کند به یادگار مانده است، البته همسر محترمشان همواره در

طول این سال‌ها یار و مشوق اصلی برایشان بود، یادش گرامی باد.

دفتر انتشارات کمک آموزشی بود و به پژوهش پیرامون مجله‌های آموزشی جهان می‌پرداخت، هر چند که مسئولان وقت دفتر انتشارات کمک آموزشی، نتوانستند از اطلاعات و نقطه نظرات ایشان در جهت نگارش منشور مجلات رشد بهره کافی را ببرند ولی سالاری بی‌وقفه و شبانه‌روز مشغول پژوهش، مطالعه و تألیف بود. بعد از گذشت چند سال دوستی و همکاری با ایشان، در اواخر

نحوه آشنایی من با ایشان در دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی بود. ایشان مدیر داخلی مجله رشد آموزشی زیست‌شناسی و بنده مدیر داخلی مجله ریاضی رشد برهان متوسطه دوم بودم. ایشان بسیار دغدغه آموزش برای جوانان و نوجوانان را داشت و در این راه شبانه‌روز تلاش می‌کرد. یادم هست که در اواسط دهه ۸۰، ایشان مسئول مرکز مطالعات راهبردی

دهه ۸۰؛ بنابه درخواست آقای وحید عالمیان مسئول گروه ریاضی دفتر تألیف کتب درسی، قرار شد که اینجانب و آقایان حمیدرضا امیری و رضا جلیلی کتاب ریاضی ۳ رشته علوم تجربی را مورد تجدید نظر قرار دهیم و بخش‌هایی را به آن کتاب اضافه نماییم تا این کتاب با کتاب‌های جدید التألیف ریاضی ۱ و ۲ آن زمان همسو شود، تغییرات فصل دوم کتاب یعنی تابع به بنده سپرده شد، چون این کتاب برای دانش‌آموزان رشته تجربی بود، سعی بر آن داشتم که از مثال‌های کاربردی تابع در علوم تجربی استفاده نمایم به همین منظور مثال‌های زیر را با کلی مطالعه در حوزه سلامت و بهداشت پیدا کردم و در قسمت ضابطه تابع قرار دادم و تمام تلاش خود را به کار گرفتم که مثال‌های انتخابی مطابق با اطلاعات و یافته‌های دانش‌آموزان این دوره باشد.

مثال ۱

اگر یک سنگ ریزه از بالای برجی به طرف پایین رها شود و شتاب جاذبه زمین $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ باشد، در این صورت فاصله پیموده شده d از موقع رها شدن پس از t ثانیه، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d(t) = 4.9t^2$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید فاصله پیموده شده d تابعی از t است. دامنه این تابع بازه $[0, t_1]$ است که t_1 زمان رسیدن سنگ ریزه به زمین است.

مثال ۲

انرژی پایه در بدن به مقدار انرژی گفته می‌شود که برای تأمین سوخت دستگاه‌های غیرارادی درون بدن مانند قلب، ریه، کلیه، دستگاه گوارش، دستگاه تنفس، غدد درون‌ریز و مانند این استفاده می‌شود.

به‌طور معمول $\frac{2}{3}$ از انرژی دریافتی بدن از غذاها، صرف تأمین فعالیت‌های پایه و $\frac{1}{3}$ دیگر برای تأمین سوخت فعالیت‌های فیزیکی روزانه است. برای مثال، مقدار کالری لازم برای یک کارمند در یک شبانه‌روز از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$30 \times \text{وزن بدن برحسب کیلوگرم} = \text{مقدار انرژی لازم برای بدن}$

چنان‌چه وزن کارمندی ۸۰ کیلوگرم باشد، برای تأمین انرژی مورد نیاز خود به $2400 = 30 \times 80$ کالری در یک شبانه‌روز احتیاج دارد. بنابراین اگر این شخص روزانه بیش از ۲۴۰۰ کالری دریافت کند، آن‌گاه دچار اضافه وزن شده و اگر کمتر از ۲۴۰۰ کالری دریافت کند، سبب کاهش وزن می‌شود. ولی اگر همان ۲۴۰۰ کالری را دریافت کند وزن او ثابت باقی می‌ماند.

با توجه به فرمول مقدار انرژی لازم برای بدن، ملاحظه می‌کنیم که مقدار این انرژی تابعی از وزن انسان است. هر چه وزن بیشتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن بیشتر و هر چه وزن کمتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن نیز کمتر می‌شود، دامنه این تابع بازه $[X_p, X_q]$ است که X_q کمترین وزن انسان‌ها و X_p بیشترین وزن انسان‌ها است.

مثال ۳

یکی از روش‌های مرسوم سنجش وزن ایده‌آل افراد، استفاده از شاخص توده بدنی با MBI^1 است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$BMI = \frac{\text{وزن بدن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجدور طول قد برحسب متر}}$$

پس از محاسبه MBI یکی از حالت‌های زیر برای هر فرد اتفاق می‌افتد.

✓ شخص لاغر است و کمبود وزن دارد. $BMI < 19 \Rightarrow$

✓ شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است. $19 \leq BMI < 25 \Rightarrow$

✓ شخص اضافه وزن دارد. $25 \leq BMI < 30 \Rightarrow$

✓ شخص چاق و وضعیت بحرانی دارد. $BMI \geq 30 \Rightarrow$

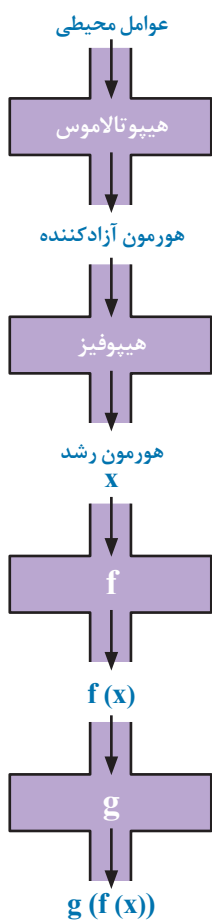
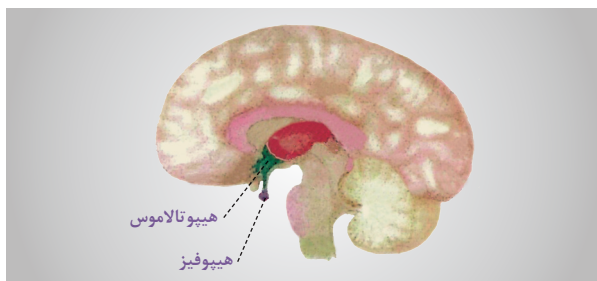
با این روش، وضعیت وزنی هر فردی مشخص می‌شود و افرادی که اضافه وزن دارند، با یک رژیم مناسب می‌توانند به محدوده سلامت وزن برسند. اما وزن ایده‌آل چیست؟

در پاسخ به این سؤال باید بگوییم که وزن ایده‌آل با سن شما رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به‌طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا می‌رود و BMI افزایش می‌یابد. به همین جهت متخصصان علوم تغذیه به کمک جدول سن، BMI مناسب گروه سنی افراد مختلف را به‌صورت زیر تعیین می‌کنند.

گروه سنی	BMI
۱۹-۲۴	۲۲
۲۵-۳۴	۲۳
۳۵-۴۴	۲۴
۴۵-۵۴	۲۵
۵۵-۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

خون می‌پردازد. هورمون رشد از راه خون به بافت استخوان می‌رسد و بر سلول‌های آن اثر می‌گذارد و باعث رشد استخوان می‌شود.

بنابراین رشد استخوان تابعی از «هورمون رشد» و هورمون رشد تابعی از «هورمون آزادکننده هورمون رشد» است، در نتیجه رشد استخوان از ترکیب این دو تابع به‌دست می‌آید. چنان‌چه تابع را به‌عنوان یک ماشین در نظر بگیریم کار هیپوتالاموس و هیپوفیز را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



اکنون اگر عمل هیپوتالاموس بر عوامل محیطی و شرایط درون بدن را با f و عمل غده هیپوفیز را با g نمایش دهیم، ترکیب دو تابع f و g را به صورت روبه‌رو خواهیم داشت:



پس از یافتن BMI مناسب با گروه سنی هر فرد، وزن ایده‌آل طبق فرمول زیر محاسبه می‌شود:

مجدور قد بر حسب متر $\times BMI =$ وزن ایده‌آل بر حسب کیلوگرم
اکنون که وزن ایده‌آل خود را دانستید، معلوم می‌شود که چه قدر اضافه وزن یا چه قدر کمبود وزن دارید.

با دقت در فرمول وزن ایده‌آل درمی‌یابیم که وزن ایده‌آل تابعی از طول قد هر فرد است، هم‌چنین چون وزن ایده‌آل از حاصل ضرب BMI در مجدور قد بر حسب متر به‌دست می‌آید، مشخص می‌شود که وزن ایده‌آل تابعی از BMI و در نتیجه گروه سنی هر فرد می‌شود. در این فرمول طول قد و BMI متغیرهایی مستقل و وزن ایده‌آل متغیری وابسته به آن‌ها است.

تغییرات و تصحیح فصل دوم کتاب را انجام دادیم تا به موضوع ترکیب دو تابع حقیقی رسیدیم. در این قسمت هم سعی بر آن داشتیم که این موضوع را با یک مثال کاربردی در علوم تجربی آغاز نماییم. اما هر چه جستجو کردم، نتوانستم که چنین مثالی را پیدا کنم. ذهنم درگیر این موضوع و یافتن مثالی در حوزه علوم تجربی بود تا این که یک روز موضوع را با زنده یاد حسن سالاری مطرح کردم. ایشان متخصص علم زیست‌شناسی بود. ابتدا از نظر ریاضی، ترکیب دو تابع را کامل برایش تشریح کردم و مثال‌هایی برای روشن‌تر شدن موضوع آوردم و سپس از ایشان خواستم که مدلی برای ترکیب دو تابع در زیست‌شناسی یا مکانیسم بدن انسان پیدا کند به‌طوری که برای دانش‌آموزان این دوره قابل ارائه باشد.

چند روز بعد، ایشان مدلی را برایم تشریح کرد که باعث رشد استخوان می‌شود و گفت با این مدل می‌توان ترکیب دو تابع را بیان کرد. آنچه در زیر ملاحظه می‌کنید، نتیجه پژوهش‌ها و بحث‌هایی است که در این زمینه با ایشان داشتم و در کتاب درسی ریاضی ۳ سال سوم آموزش متوسطه نگارش کردم. این کتاب درسی، بین سال‌های ۱۳۸۹ تا ۱۳۹۵ به چاپ می‌رسید.

■ ترکیب دو تابع حقیقی

هیپوتالاموس بخشی از مغز است که تنظیم محیط درون بدن را انجام می‌دهد. اگر گرسنه یا تشنه می‌شویم یا دمای بدنمان افزایش یا کاهش می‌یابد، همگی با فرماندهی هیپوتالاموس انجام می‌شود، برای مثال هیپوتالاموس با تأثیر از عوامل محیطی و شرایط درون بدن، ملکولی به نام «هورمون آزادکننده هورمون رشد» را به درون خون ترشح می‌کند. پس از رسیدن این ملکول به غده هیپوفیز که به‌سطح زیرین مغز چسبیده است، غده هیپوفیز به آزادسازی هورمون رشد در

* بی‌نوشت

1. Body Mass Index

ریاضیات یک صفحه‌ای

مهدی اقبالی‌املشی

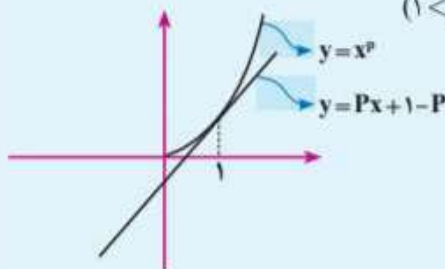
نامساوی یانگ

و به این ترتیب نامساوی زیر به ذهن‌ها رسید:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad (**)$$

که p و q مثبت هستند و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ را نامساوی یانگ می‌نامند.

برای اثبات نامساوی یانگ، ابتدا $y = x^p$ ($x \geq 0$) را در نظر بگیرید و معادله مماس بر منحنی را در $x = 1$ از منحنی بنویسید: ($1 < p$)



$$px + 1 - p \leq x^p \quad \text{پس داریم:}$$

$$x \leq \frac{1}{p} x^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{پس:}$$

حال کافی است به جای x ، $\frac{a}{b^{\frac{1}{q}}}$ قرار دهیم.

چند نمونه: a و b اعداد مثبت هستند و α و β اعداد غیر منفی که:

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\text{I) } ab \leq \alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\text{II) } ab \leq \frac{r}{r+1} a^{\frac{r+1}{r}} + \frac{1}{r+1} b^{r+1}$$

$$\text{III) } a^{\alpha} b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b$$

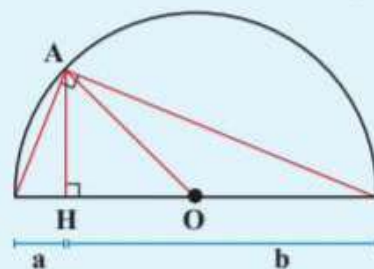
$$\text{IV) } x \leq \frac{1}{1^{\alpha}} x^{1^{\alpha}} + \frac{\alpha}{1^{\alpha}} \quad (x > 0)$$

۱. در هر مثلث قائم‌الزاویه:

الف) میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

ب) مربع ارتفاع وارد بر وتر، برابر است با حاصل ضرب دو قطعه‌ای که بر وتر جدا می‌کند.

۲. حال فرض کنید a و b دو عدد مثبت باشند:



$$AH = \sqrt{ab} \text{ و } AO = \frac{a+b}{2}$$

۳. برای a و b های مثبت، $\sqrt{ab}$ و $\frac{a+b}{2}$ را به ترتیب میانگین‌های هندسی و حسابی a و b می‌نامیم و به ترتیب با G و A نمایش می‌دهیم. لذا:

$$G \leq A \quad (*)$$

(*) را نامساوی حسابی - هندسی می‌نامند.

۴. از (*) نتیجه می‌شود:

$$\text{I) } |\sin x \cos x| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{II) } 2 \leq |\tan x| + |\cot x|$$

$$\text{III) } 2 \leq e^u + e^{-u}$$

$$(a, b > 0)$$

۵. از (*) داریم:

$$ab \leq \frac{1}{r} a^r + \frac{1}{r} b^r$$



مسأله نیزه

ریاضی
تاریخ

از غیاث الدین جمشید کاشانی

غیاث الدین جمشید کاشانی، ریاضی دان عالی مقام، محاسبی ماهر و منجمی زبردست، مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود. به حق می توان او را از برجسته ترین ریاضی دانان دوره اسلامی دانست.

تاریخ تولدش دقیق معلوم نیست، ولی می دانیم که او از حدود سال ۸۰۸ هجری قمری تا پایان عمرش یعنی سال ۸۳۲، فعالیت علمی داشته است. وی در ۱۹ رمضان سال ۸۳۲ در خارج شهر سمرقند درگذشت.

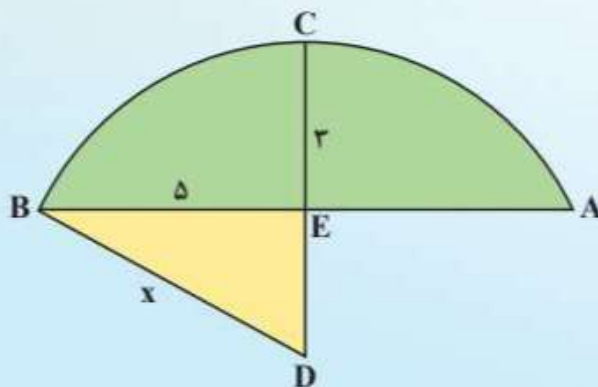
او در محاسبه جذر و کعب پیش قدم بوده و مخترع کسرهای اعشاری می باشد. شاهکار او ساختن رصدخانه سمرقند بود. طریقه محاسبه حجم گنبدیهای مجوف که از فرمول های مشکل ریاضی است از کارهای او می باشد.

این ریاضی دان مسلمان دو رساله مهم دارد: ۱. «مفتاح الحساب» و ۲. «رسالة المحيطیه». وی در «رسالة المحيطیه» مقدار عدد « π » را تا ۱۷ رقم اعشار محاسبه کرده است که دقیق ترین مقدار « π » تا آن زمان است.

مسأله زیر یکی از مسائلی است که او طرح و حل کرده است:

مسأله: نیزه ای به طور عمودی در آب قرار گرفته و به اندازه ۳ آرش^{*} از آب بیرون است. باد نیزه را منحرف کرده و آن را در آب به این ترتیب غرق کرده که رأس آن بر آب قرار گرفت و پای آن بر جای سابق خود باقی ماند. فاصله بین موقعیت اول و دوم آن، برابر ۵ آرش است. ارتفاع نیزه را محاسبه کنید.

حل: از مثلث قائم الزاویه BED (مطابق شکل) به دست می آید:



$$(x - 3)^2 + 5^2 = x^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + 25 = x^2$$

$$6x = 34 \Rightarrow 3x = 17$$

$$x = \frac{17}{3} = 5 \frac{2}{3} \text{ (آرش)}$$

* آرش: واحد اندازه گیری طول در قدیم بوده که معادل از آرنج تا سر انگشت است. به آن «ذراع» نیز می گویند.